

3

Matemáticas



Alejandro de Icaza Peña



Secundaria



the same time, the fact that the two countries have similar political systems and similar political culture may have contributed to the similar results.

It is interesting to note that the results of the present study are similar to those of the study by Wong and Chan (2001) on the political participation of Hong Kong citizens.

There are several limitations of the present study. First, the sample size is small.

Second, the data are self-reported and may be subject to common method bias.

Third, the data are cross-sectional and do not allow for the study of changes over time.

Fourth, the data do not allow for the study of the causal relationships between the variables.

Fifth, the data do not allow for the study of the mediating and moderating effects of the variables.

Sixth, the data do not allow for the study of the generalizability of the results to other countries.

Seventh, the data do not allow for the study of the stability of the results over time.

Eighth, the data do not allow for the study of the robustness of the results to different statistical methods.

Ninth, the data do not allow for the study of the replicability of the results.

Tenth, the data do not allow for the study of the external validity of the results.

Eleventh, the data do not allow for the study of the internal validity of the results.

Twelfth, the data do not allow for the study of the construct validity of the results.

Thirteenth, the data do not allow for the study of the content validity of the results.

Fourteenth, the data do not allow for the study of the face validity of the results.

Fifteenth, the data do not allow for the study of the reliability of the results.

Sixteenth, the data do not allow for the study of the validity of the results.

Seventeenth, the data do not allow for the study of the accuracy of the results.

Eighteenth, the data do not allow for the study of the precision of the results.

Nineteenth, the data do not allow for the study of the consistency of the results.

Twentieth, the data do not allow for the study of the comparability of the results.

Twenty-first, the data do not allow for the study of the compatibility of the results.

Twenty-second, the data do not allow for the study of the coherence of the results.

Twenty-third, the data do not allow for the study of the completeness of the results.

Twenty-fourth, the data do not allow for the study of the sufficiency of the results.

Twenty-fifth, the data do not allow for the study of the necessity of the results.

3

Matemáticas



Alejandro de Icaza Peña

Secundaria

3°



Matemáticas 3 fue elaborado en Editorial Santillana por el siguiente equipo:

Dirección General de Contenidos

Antonio Moreno Paniagua

Dirección de Ediciones

Wilebaldo Nava Reyes

Gerencia de Arte y Diseño

Humberto Ayala Santiago

Gerencia de Secundaria

Irán Vázquez Rodríguez

Coordinación de Secundaria

Óscar Díaz Chávez

Coordinación de Matemáticas

Ma. del Pilar Vergara Ríos

Coordinación de Diseño

Carlos A. Vela Turcott

Coordinación de Iconografía

Nadina Nizameidinova Malekova

Coordinación de Realización

Gabriela Armillas Bojorges

Edición

Rubén García Madero y Leticia Martínez Ruiz

Asistencia editorial

Enrique Martínez Sánchez, Victoria Moreno Ajapanecatl, Zoraida Reyes González, Natalia Herrera López y Óscar Cerón Rodríguez

Corrección de estilo

Pablo Mjares Muñoz y Elizabeth Cruz Madrid

Edición de Realización

Haydée Jaramillo Barona

Edición Digital

Miguel Ángel Flores Medina

Diseño de portada e interiores

Raymundo Ríos Yáñez

Diagramación

Eduardo Sevilla González e Itzel Ramírez Osorno

Iconografía

Miguel Bucio Trejo

Restricción

Héctor Orlando Jarquín, Ricardo Ríos Delgado y Alma Julieta Núñez Cruz

Fotografía

Shutterstock.com, Thinkstock.com, Durga Archivo digital, Latinstock, Wikipedia, cocinarecetas.hola.com

Digitalización de imagen

Gerardo Hernández Ortiz

La presentación y disposición en conjunto y de cada página de **Matemáticas 3** son propiedad del editor. Queda estrictamente prohibida la reproducción parcial o total de esta obra por cualquier sistema o método electrónico, incluso el fotocopiado, sin autorización escrita del editor.

© 2013 por Alejandro de Icaza Peña

D. R. © 2013 por EDITORIAL SANTILLANA, S.A. de C.V.
Av. Río Michoac 274, colonia Acacias, C. P. 03240
Delegación Benito Juárez, México, D.F.

Edición: Noviembre de 2013

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana.
Reg. Núm. 802
Impreso en México/Printed in Mexico

Presentación

El libro *Matemáticas 3* se diseñó con la finalidad de ser una herramienta flexible que acompañe en todo momento al alumno, al profesor y a los padres de familia en el proceso de formación matemática de los alumnos de tercer grado.

En esta obra se plantean situaciones en diferentes contextos, algunos relacionados con la vida diaria y otros con circunstancias especializadas, a fin de que los alumnos reconozcan las matemáticas como un saber fundamental para resolver tareas en su entorno cotidiano, así como para tomar decisiones donde intervienen relaciones numéricas, geométricas y probabilísticas.

Es importante señalar que en las actividades propuestas se consideraron los intereses de los alumnos de secundaria, las experiencias de profesores y el nivel de dificultad en el tratamiento del contenido, ya que las matemáticas son un factor importante para la formación de los estudiantes de este nivel educativo. En el diseño de las lecciones también se consideraron las cuatro competencias matemáticas:

- Resolver problemas de manera autónoma.
- Comunicar información matemática.
- Validar procedimientos y resultados.
- Manejar técnicas eficientemente.

Otro de los propósitos de este material es fomentar en los alumnos la idea de que los resultados que obtengan en el aprendizaje dependerán en gran medida de que reconozcan la importancia del trabajo colaborativo, en el cual la buena disposición para discutir los temas, confrontar resultados, escuchar opiniones diferentes, observar y trabajar en equipos son actitudes fundamentales tanto para validar procedimientos y desarrollarse en lo académico como en lo personal.

Ante esta concepción de las matemáticas, el papel del docente debe ser de guía y responsable de centrar el análisis en la veracidad de los resultados matemáticos, así como de validador de las conclusiones a las que lleguen los alumnos. También será mediador y acompañante del proceso de formación de los estudiantes junto con los padres de familia.

Por todo lo anterior, les damos la más cordial bienvenida al estudio de las matemáticas en el tercer grado de secundaria. Deseamos que los resultados que se obtengan a lo largo de este ciclo escolar sean exitosos.

Los editores

Conoce tu libro

A continuación te mostramos el propósito de cada sección que integra el libro **Matemáticas 3**, las cuales están numeradas para que las identifiques con mayor facilidad.

Entrada de bloque

Este apartado está integrado por una doble página con un texto relacionado con uno o algunos de los contenidos por trabajar en el bloque y una fotografía que hace alusión a ellos. En él se incluyen los siguientes elementos:

1 Bloque

Hace referencia al número de bloque de estudio correspondiente del libro.

Alumno

En este ciclo aplicarás los conocimientos que adquiriste en tus cursos anteriores de secundaria y ampliarás lo que ya sabes; esto implica enfrentar mayores retos académicos, que te permitirán adquirir una formación matemática cada vez más sólida.

Debido a ello, el libro **Matemáticas 3** contiene actividades que integran desafíos y problemas matemáticos cuya resolución implica que expliques tus ideas, argumentes tus procedimientos, encuentres la vinculación de los contenidos matemáticos con otros campos del conocimiento, y junto con tus compañeros elabores conclusiones para validar el trabajo realizado.

BLOQUE

1

Introducción a la historia

2

Representación de ecuaciones cuadráticas en la historia

Diversos personajes han hecho aportes al álgebra para desarrollarla como lo conocemos. Los árabes, a lo largo de la edad de oro del mundo musulmán, entre los años 700 y 1200 d. de C., tradujeron y desarrollaron los conocimientos de la Grecia antigua e India, y lograron gran desarrollo en álgebra y trigonometría.

El más recordado de los matemáticos árabes es Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi. En su tratado sobre álgebra, al-Khwarizmi explica cómo resolver ecuaciones cuadráticas. Al-Khwarizmi indicaba con palabras el planteamiento y la solución de las ecuaciones, por ejemplo, esta es parte de una de sus explicaciones para resolver una ecuación cuadrática: "El método de resolución consiste en esto: toma la mitad de los raíces, que es cinco, lo multiplicas por sí mismo, lo que da veinticinco. Como puedes ver, no hay letras ni símbolos algebraicos."

Fue en el siglo XVI cuando se introdujeron los símbolos para plantear ecuaciones. François Viète (1540-1603) tuvo gran influencia en ello, pues propuso usar "parámetros" por primera vez en la histo-

ria de las matemáticas. La idea de los parámetros es fundamental en matemáticas. Hasta entonces, en álgebra se estudiaban casos especiales, y se resolvían ecuaciones con coeficientes específicos, pero no existía un modelo que representara "todos" las ecuaciones cuadráticas (de forma similar a como en geometría un diagrama de triángulo ABC representaba "todos" los triángulos).

Viète utilizó las letras del alfabeto para simbolizar términos variables y constantes: las vocales para representar incógnitas, y las consonantes para las magnitudes o números dados o supuestamente conocidos (parámetros). Su notación tiene diferencias en comparación con la actual, pero fue un gran avance en relación con la descripción en palabras. Por ejemplo, una expresión como $2x^2 - 5x + 23$, Viète la escribiría como $2x^2 - 5x + 23$, donde x es la incógnita, y el cuadrado y cero significa "igual".

Viète aplicó el estudio de las ecuaciones, con lo que el álgebra pudo estudiar clases de ecuaciones y concentrarse en la estructura de los problemas y no en su forma particular.

➤ Lee y subraya las respuestas correctas. Después responde.

1. Las explicaciones sobre las ecuaciones cuadráticas en los tratados árabes indican:

A] símbolos. B] palabras. C] números. D] consonantes.

2. ¿Cuál fue la aportación de François Viète al álgebra actual?

A] Estudiar varias clases de ecuaciones. B] Situación de ecuaciones específicas.
C] Usar letras del alfabeto en el álgebra. D] Plantear parámetros para geometría.

3. ¿Cuál fue la principal aportación de los matemáticos árabes?

4. ¿La forma como planteaba las ecuaciones Viète es mejor que la usada por Al-Khwarizmi? Explica por qué.

3

16

4

5

Aprendizajes esperados:

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Presentación del bloque

El descenso en paracaídas, conocido como caídas libres, es un fenómeno de velocidad constante que se relaciona con la aceleración que actúa sobre los cuerpos en la gravedad. Mediante una ecuación cuadrática se puede determinar la altura de la que se lanzaron los paracaidistas a su velocidad final.

© SANTILLANA

17

2 Invitación a la lectura

El propósito de este apartado es propiciar el desarrollo de tu habilidad lectora mediante un texto que guarda relación con algunos de los contenidos que se trabajan en el bloque.

3 Comprensión lectora

Las preguntas que se plantean en este apartado tienen el propósito de que los estudiantes desarrollen competencias lectoras mediante la búsqueda y recuperación de información.

4 Fotografía

Muestra una gran imagen relacionada con el título de la sección.

5 Aprendizajes esperados

Orientan tus procesos de aprendizaje al señalar lo que se espera que logres al final del bloque.

Docente

El libro **Matemáticas 3** contiene actividades cuidadosamente diseñadas, estructuradas, seleccionadas y validadas en el aula escolar.

Muchas de estas se desarrollan en contextos cercanos a los estudiantes, como una cancha de fútbol. Con ello, se quiere comunicar que las matemáticas son útiles en la vida diaria para resolver situaciones básicas, y que sin duda, son imprescindibles para el avance científico y tecnológico de la actualidad.

La propuesta didáctica del libro fomenta el trabajo en equipos y en grupo con la intención de que todos participen en la construcción del conocimiento matemático. Aquí la discusión, la confrontación, el intercambio de ideas y la explicitación de dificulta-

des y dudas por parte de los alumnos, cobran un papel fundamental. En este contexto, la labor del profesor debe ser de mediador y guía para que los estudiantes alcancen el objetivo y desarrollen las competencias matemáticas.

Los contenidos de este libro están organizados en cinco bloques, cada uno compuesto por un número variable de lecciones.

Al inicio de cada bloque se hace una "Invitación a la lectura". El objetivo de las preguntas que se plantean en este apartado es que los estudiantes desarrollen competencias lectoras; que hagan inferencias e interpretaciones del contenido del texto a partir de sus conocimientos previos y que construyan su capacidad crítico-valorativa al generar opiniones propias. Los indicadores anteriores le permitirán evaluar el nivel de comprensión lectora de sus alumnos.

Conoce tu libro

- 6 Lecciones**
Las lecciones presentan las situaciones didácticas necesarias para tratar de manera adecuada los contenidos.
- 7 Título**
Cada lección tiene un título relacionado con el contenido que construirás con tus compañeros y profesor.
- 8 Contenido**
Se menciona el Eje, Tema y Contenido por trabajar en la lección, para que tengas una idea clara de su ubicación.
- 9 Inicio**
Se plantean actividades que te permiten resolver problemas al aplicar lo que conoces acerca del tema que se estudia en cada lección.

22

7

6

Sólidos de revolución

Eje, Tema y Contenido
Tema: Figuras geométricas

Contenido: Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje un triángulo rectángulo, un rectángulo y un triángulo. Construcción de diversos planos de corte y tramos rectos.

8

9

Patinaje artístico

6. Organiza un equipo, vean lo que se pide.

- Elige a quién o a cuántos de patinaje artístico y qué lo que patinen es, el nivel, algunos movimientos en distintas posiciones, logrando formar en uno algunos tipos de geometrías.
- Observa el diagrama de la pirameta, se que en la la pirameta, el triángulo como que se relaciona parte de él. ¿Qué cuerpos geométricos generaría con la pirameta?
- Señalar los cuerpos geométricos que se forman al girar la pirameta.

7. Elige a quién o a cuántos de patinaje artístico y qué lo que patinen es, el nivel, algunos movimientos en distintas posiciones, logrando formar en uno algunos tipos de geometrías.

8. Elige a quién o a cuántos de patinaje artístico y qué lo que patinen es, el nivel, algunos movimientos en distintas posiciones, logrando formar en uno algunos tipos de geometrías.

9. Elige a quién o a cuántos de patinaje artístico y qué lo que patinen es, el nivel, algunos movimientos en distintas posiciones, logrando formar en uno algunos tipos de geometrías.

Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuerpos geométricos										

— ¿Te puedes generar el mismo cuerpo con diferentes bases? ¿Por qué?

10. Señalar en sus actividades y proponer formas de los sólidos.

10

7. Investigan en un medio digital o electrónico las propiedades de la rotación y sus diferentes tipos de rotación y el centro de rotación.

- Analiza la información obtenida y completa con tus conclusiones y con el siguiente texto.

Rotación: Es el movimiento que se realiza a lo largo de un eje de un punto o segmento o centro de rotación de un cuerpo. El ángulo de giro es el ángulo que se forma de la figura original y su imagen tras el movimiento de rotación.

Una figura es rotada de una o de las otras dos maneras de rotación en torno al centro de rotación y se mide uno de los ángulos que se forman al unir dos puntos correspondientes con el punto de rotación, como que el ángulo de rotación. El ángulo que forman ambos con el centro de rotación es llamado el ángulo de rotación.

• Cuando la rotación es de 360°, la figura que se obtiene cumple con las condiciones de simetría central.

- Con base en esta información, el ángulo y el centro de rotación, se cumplen con las propiedades de la rotación.

8. En grupo, tienen un cubo de un cuerpo que se aplica a la rotación. Explican lo que el grupo y el centro de rotación geométrico.

9. Señalar los cuerpos y señalar sobre los dibujos que determinan que los figuras sepan rotación.

El centro de rotación de una figura

8. En grupo, tienen un cubo de un cuerpo que se aplica a la rotación. Explican lo que el grupo y el centro de rotación geométrico.

- Señalar el centro de rotación de la figura, el ángulo de rotación.
- Señalar el centro de rotación de la figura, el ángulo de rotación.

- 10 Desarrollo**
A lo largo de la lección tendrás oportunidad de explicitar tus ideas, probar distintos procedimientos para resolver las situaciones y desafíos matemáticos; así como validar aquellos procedimientos que, aunque correctos, son más eficientes que otros.
- 11 Glosario**
Presenta definiciones de términos matemáticos que pueden resultarte desconocidos o para que complementes tus ideas acerca de los mismos.

6

© SANTILLANA

Siendo la media o el momento estadístico, se mide la tendencia de un suceso a ocurrir, se llama **probabilidad** de su correspondiente **PAI**. La probabilidad de que ocurra un evento es igual al cociente del número de eventos favorables entre el total de eventos posibles. Por otro, la escala de medida de un suceso siempre está comprendida entre 0 y 1.

12

Es un **evento seguro** el que está formado por todos los posibles resultados, es decir, por el espacio muestral. Obtener un 6 al lanzar una moneda es un suceso seguro. Un **evento imposible** es aquel que no tiene ningún elemento dentro del espacio muestral. Tirar un dado y obtener 7 es un evento imposible.

Complementarios y mutuamente excluyentes

A. Resuelven en grupo las siguientes actividades.

1. Determina el espacio muestral de lanzar un dado y una moneda al mismo tiempo.

• $S = \{ \dots \}$

2. Considerando el espacio muestral, pon los datos siguientes en la tabla.

Evento o sucesos	Resultados posibles del evento	Probabilidad
A. Cas en número par y sal.	$A = \{(2, S), (4, S), (6, S)\}$	$P(A) = \frac{3}{12}$
B. Cas en número impar y sal.	$B = \{(2, A), (4, A), (6, A)\}$	
C. Cas en número mayor que 3 y agita.		
D. Cas en número impar y sal.		
E. $E = \{(1, A), (2, A), (3, A)\}$		
F. $F = \{(4, S), (5, S), (6, S)\}$		

3. Compara los eventos A y C, ¿tienen elementos en común? ¿Dónde hace diferente?

4. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra A y B? ¿Explica tu respuesta.

5. ¿Pueden darse al mismo tiempo los eventos B y D? ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra uno u otro? Justifica tus respuestas.

6. ¿Pueden darse al mismo tiempo los eventos A y D? Argumenta.

7. Si se lanzan los eventos $H = \{(1, S), (2, S), (3, S)\}$ y $G = \{(4, A), (5, A), (6, A)\}$, ¿pueden darse al mismo tiempo ambos? Explica tu respuesta.

8. ¿Qué significa cuando puedes afirmar el hecho de que dos eventos son mutuamente excluyentes? ¿Al hecho de que dos eventos no tengan elementos comunes?

13 Socializa tus conclusiones con el grupo. Investiga y comenta lo que entienden por eventos mutuamente excluyentes y registra tus acuerdos.



12 Conceptos y procedimientos

En las lecciones se incluyen definiciones, procedimientos y explicaciones para que enriquezcas el trabajo en clase y reafirmes o elabores tus conclusiones matemáticas.

13 Socialización

Al final de cada actividad, podrás confrontar tus ideas con las de tus compañeros, escuchar puntos de vista, y aprender gradualmente a redactar tus conclusiones como producto del debate escolar. Con el trabajo diario podrás comunicar de manera clara tus argumentos matemáticos y validarlos en la clase. La validación es fundamental para construir los contenidos matemáticos que estudias.

14 Apoyo tecnológico

En esta sección se sugieren páginas electrónicas donde tendrás la oportunidad de ampliar tus conocimientos respecto a los contenidos estudiados. La sección puede trabajarse fuera del aula escolar, por lo cual es necesario que tengas acceso a una computadora con Internet. Comenta tus dudas en el salón de clases para que las resuelvan en grupo. Todas las direcciones electrónicas están vigentes y actualizadas, sin embargo pueden tardar un poco en abrir, ya que son Interactivos o Applets. Por otro lado, algunas páginas requieren instalar aplicaciones como Java o Descartes, las cuales no afectan a la computadora y se pueden descargar sin problemas. Todas las direcciones web se revisan constantemente.

15 Reto

Cada lección cierra con un reto. En él se plantean diversas situaciones, en las que se ponen a prueba los conocimientos adquiridos. Comenta en clase tus resultados y los procedimientos que empleaste. Si algún "Reto" te resulta difícil, coméntalo con tus compañeros y con tu profesor y juntos busquen la solución.

Eventos independientes

1. En la información y resuelve en tu cuaderno.

1. En un juego, se lanzan cuatro dados consecutivos y en todos ellos sale 6.

- ¿Cuál es la probabilidad de que en el quinto lanzamiento salga 10? Argumenta.
- ¿Los resultados de los cuatro primeros eventos afectan al resultado del quinto? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuál es el espacio muestral de cada dado?
- ¿La probabilidad de ocurrencia de un evento influye en la probabilidad de que suceda nuevamente al repetir el experimento? Argumenta.



1. Juego de dados que comienza en cualquier posición de los dados con los cuatro.

2. En una urna se tienen cinco fichas: una verde, una amarilla, una azul, una negra y una roja. Si se saca una ficha...

- si se saca la ficha negra y se devuelve a la urna, ¿cuál es la probabilidad de sacar la ficha verde en la segunda extracción? Explica tu respuesta. ¿Diferencia todo se ve afectado por la primera extracción? ¿Por qué?
- si se saca la ficha negra y se devuelve a la urna en la segunda extracción con la ficha roja, ¿se ve afectada la probabilidad de sacar la ficha roja en la segunda extracción? ¿Por qué? ¿La probabilidad se ve afectada por los resultados anteriores? Justifica.

3. Socializa en grupo tus argumentos y compáralos con la siguiente definición.

Los **eventos independientes** son los de probabilidad de ocurrencia de uno no influye en la probabilidad de ocurrencia de otro. En el caso de la urna, al hecho de sacar y regresar una ficha no afecta al resultado de la siguiente toma. La probabilidad de cada evento sigue siendo la misma.

4. En grupo, registra en el cuaderno tus conclusiones y validalas con el profesor.

15 Reto Tres tipos de eventos aleatorios

1. En pareja, analiza en cada caso qué tipo de eventos corresponde y por qué.

A. Experimento: Lanzamiento de un dado y dos monedas.

• Evento B = $\{(2, sal, sal)\}$ • Evento C = $\{(A, agita, agita)\}$

• Los eventos _____ porque _____

B. Experimento: Lanzamiento de tres monedas.

• Evento B = $\{(S, S, S)\}$ • Evento C = $\{(S, A, A)\}$

• Los eventos _____ porque _____

2. Plantea un problema en el que se tenga que identificar la escala de probabilidad de un suceso aleatorio, tal como se realizó con el ejemplo del suceso "Apertura nacional de la feria".

3. Discute en grupo tus experiencias. Registra las dificultades o dudas que encuentres y pide ayuda de tu profesor para aclararlas.

Apoyo tecnológico 14

En esta sección se sugieren páginas electrónicas donde tendrás la oportunidad de ampliar tus conocimientos respecto a los contenidos estudiados.

www.interactivos.org

www.applets.org

www.descartes.org

www.geogebra.org

www.khanacademy.org

Para saber más

16

Aplicaciones del teorema de Pitágoras

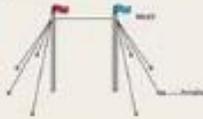
En esta sección aplicamos los conocimientos acerca del teorema de Pitágoras, el cual estudiaste en la lección 12.

1. En pareja analiza el plano de una casa que se proyecta y construye en su escuela.

- María trabaja en un colegio en el encargamiento de instalar la casa. El cable que se debe usar para los cables que sostienen cada módulo vertical a una armadura colocada en el piso a cierta distancia de la base. María debe calcular la cantidad de cable que se necesitará para montar la capota del techo según el siguiente diseño:

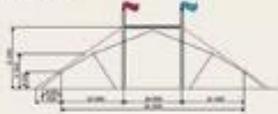


Casa de una



- Si la altura del módulo es de 30 m y la distancia entre la base del módulo y cada armadura es de 23 m, ¿cuántos metros de cable debe usar María para cada módulo lateral?
- Describe el procedimiento que sigues para resolver la pregunta anterior.
- Con la información que tienes, ¿se puede calcular el total de cable necesario para la casa? ¿Por qué?

- La compañía cliente decidió ampliar el espectáculo y, por consiguiente, usará una capota más grande. Una empresa encargó la proyección del siguiente modelo. Las medidas están dadas en el siguiente:



- Si la línea roja representa un tipo especial de cable reforzado, ¿Cuánto debe medir? Describe el procedimiento que sigues para encontrar el resultado. Incluye todos en su desarrollo.
- ¿Cuántos metros de cable reforzado se necesitarán para la nueva capota? Justifica tu respuesta.

► Soluciona las preguntas y problemas. Si tienes dudas, coméntalas con el profesor.

© SANTILLANA

17 Evaluación tipo PISA

Al final del bloque se encuentra una serie de actividades que debes resolver de manera individual, las cuales te permitirán poner en práctica lo que aprendiste en el bloque. Se proponen preguntas abiertas y de opción múltiple, además de problemas, todos relacionados con los aprendizajes esperados. En ellas se sigue el modelo de PISA, que significa Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes.

Evaluación tipo PISA 17

► Usa la opción con la que quieras contestar.

1. Selecciona los números cuyo producto es 600, y que además estén en la recta t , con valores que el producto es 600, un número es x y el otro 600, al plantear la ecuación $\frac{x}{2} = \frac{600}{x}$ y resolverla, se sabe que los números que cumplen con la condición son:

A) 20 y 30 B) -20 y 30 C) 20 y -30 D) -20 y -30

2. Determina los números que cumplen con la siguiente condición: el número cuyo triple es igualado en unidades en igual a su cuadrado.

A) 3 y -1 B) -3 y 1 C) 5 y 1 D) -5 y -1

3. Encoge el número que multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado.

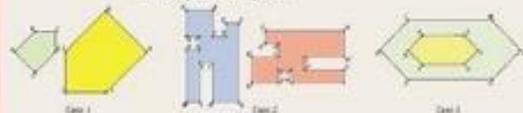
A) 0 y -5 B) -0 y 5 C) -0 y -5 D) 0 y 5

4. Elige la opción que determina la medida con esta área y g , considerando que los triángulos son semejantes y las medidas están dadas en centímetros.



5. Resalta lo que se mide en cada caso.

6. Identifica si los par de polígonos son semejantes, con un color o ninguno de los colores en. Argumenta tu respuesta.



7. Plantea un problema donde se evalúe la semejanza y congruencia de triángulos, usando los datos de los triángulos del recuadro 4.

© SANTILLANA

© SANTILLANA

c. Eventos independientes.

5. Se modifica el juego del gato y del ratón y ahora se lanzan dos dados. Sea el evento A: caer 6 y 4, y el evento B: caer 5 y 3. Estos son eventos
debido a que
6. Si el ratón avanza el cociente de los números que salen al lanzar dos dados, sea el evento A: caer 4 y 2, y B: caer 6 y 3, los eventos son:
debido a que
7. Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

8. Determina si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas.

Oración	Veracidad
Dos eventos o más son complementarios cuando su unión de el espacio muestral y la suma de sus probabilidades es menor que 100%.	
Cuando la probabilidad de un evento A no es afectada por el resultado de otro B, estos eventos son eventos dependientes.	
Los eventos con un número mayor que 3 y así y con un número menor que 4 y ópula son eventos mutuamente excluyentes, ya que no pueden ocurrir al mismo tiempo.	
Los eventos independientes tienen probabilidad menor que 1 y mayor que 0.	

9. Reescribe las oraciones falsas de manera que ahora comuniquen una verdad.

18 Valoro mi avance

Reflexiona acerca del trabajo realizado en el bloque. Completa la tabla con los términos siempre, a veces o poco.

	Indicadores
Identifico y planteo, dada una experiencia a la historia, eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	Argumento y comunico de manera oral y escrita las diferencias entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.
Cálculo la probabilidad teórica de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independiente.	Resuelvo problemas de manera autónoma asociados a las nociones de probabilidad.

En clase, expresa las dificultades que hayas tenido al resolver la evaluación. En grupo, con el apoyo del maestro, busquen estrategias para superar dichas dificultades.

69

18 Valoro mi avance

En este apartado, que aparece al final de cada evaluación, encontrarás una tabla en la cual evaluarás tus avances respecto a los aprendizajes esperados del bloque, así como tus habilidades y actitudes.

19 Fuentes de información

En este apartado encontrarás sugerencias impresas para ti, así como sugerencias impresas y electrónicas para el profesor, con el fin de enriquecer el trabajo a lo largo del ciclo escolar.

Fuentes de información 19

Para el estudiante

Impresas

- J. Anco (2003). *El matemático del Rey*. España: Planeta.
- C. Andrades (2005). *Póngame un Ato de Matemáticas*. México: SM, El barco de Vapor. Seber núm. 4.
- L. Balbuena (2005). *Cuentos del cara*. España: Nivel.
- J. Burgos (1994). *Los relatos de Gudar Ben Just*. Madrid: Fundación General IUPM.
- M. Campos (2002). *Andrés y el dragón matemático*. España: Laertes.
- J. Carlivilla (2003). *Historia de las Matemáticas en comics*. México: Proyecto Sur de Ediciones.
- J. Collantes y A. Pérez (2004). *Mañuecos Cuentamates*. España: Nivel.
- — (2003). *Mañuecos Cuentos con problemas 2*. España: Nivel.
- — (2005). *Mañuecos Cuentos con problemas 3*. España: Nivel.
- M. Enzensberger (1998). *El diablo de los números*. España: Siruela.
- C. Fraibem (2000). *Malditas Matemáticas: Alicia en el País de los Números*. Madrid: Alguara.
- — (1998). *El gran juego*. Madrid: Alguara.
- R. Gómez (2000). *La selva de los números*. Madrid: Alguara.
- D. Gund (2000). *El teorema del loro*. Barcelona: Anagrama.
- — (2002). *El metro del mundo*. Barcelona: Anagrama.
- — (2002). *La medida del mundo*. México: Ediciones de Bolsillo.
- M. Guzmán (2007). *Cuentos con cuentas*. Barcelona: Nivel.
- M. Haddon (2004). *El curioso incidente del perro a medianoche*. Barcelona: Salamandra.
- T. Harba (1998). *El hombre que calculaba*. España: Castalia Editores.
- I. Molina (2004). *El señor del cara*. Barcelona: Alguara.
- R. Moreno y J. Vegas (2002). *Una historia de las Matemáticas para jóvenes. Desde la Antigüedad hasta el Renacimiento*. España: Nivel.
- J. Mills y J. Foges (2006). *Números pares, impares e idiotas*. España: Alba Editorial.
- J. Muñoz (2008). *Ernesto el aprendiz de matemago*. España: Nivel.
- L. Norman (2002). *El país de las matem para novatos*. España: Nivel.
- — (2002). *El país de las matem para expertos*. España: Nivel.
- R. Rodríguez (2003). *Cuentos y cuentas de los matemáticos*. Barcelona: Revert.
- I. Roldán (2003). *Teoremas divertimentos matemáticos teatrales*. España: Nivel.

Índice

Presentación	3
Conoce tu libro	4
Alumno	4
Docente	5
Dosificación	12

Bloque 1 16

Lección 1	
Problemas con ecuaciones cuadráticas	18
Lección 2	
Construcción de figuras congruentes y semejantes	24
Lección 3	
Criterios de congruencia y semejanza	32
Lección 4	
Gráficas, tablas y expresiones algebraicas	40
Lección 5	
Relaciones de variación cuadrática	48
Lección 6	
Complementarios, mutuamente excluyentes e independientes	54
Lección 7	
Diseño y análisis de una encuesta	60
Para saber más	66
Evaluación tipo PISA	68

Bloque 2 70

Lección 8	
Ecuaciones cuadráticas por factorización	72
Lección 9	
Rotación y traslación	78
Lección 10	
Simetría axial, rotación y traslación	86
Lección 11	
Cuadrados y triángulo rectángulo	94
Lección 12	
El teorema de Pitágoras	100
Lección 13	
Mutuamente excluyentes y complementarios	106
Para saber más	114
Evaluación tipo PISA	116

Bloque 3 118

Lección 14	
Ecuaciones de segundo grado	120
Lección 15	
Congruencia y semejanza de triángulos	126
Lección 16	
El teorema de Tales	132
Lección 17	
Figuras homotéticas	138

Lección 18

Gráficas de funciones cuadráticas146

Lección 19

Curvas que modelan situaciones en movimiento 154

Lección 20

Probabilidad de eventos independientes 162

Para saber más 168

Evaluación tipo PISA 170

Bloque 4 172

Lección 21

Sucesiones cuadráticas 174

Lección 22

Sólidos de revolución 180

Lección 23

Pendiente de una recta 188

Lección 24

Ángulos agudos de un triángulo rectángulo 196

Lección 25

Razones trigonométricas204

Lección 26

Razón de cambio y pendiente de una recta 210

Lección 27

Desviación media en un conjunto de datos 216

Para saber más 222

Evaluación tipo PISA 224

Bloque 5 226

Lección 28

Distintos tipos de ecuaciones 228

Lección 29

Secciones cónicas 234

Lección 30

Volumen de cilindros y conos242

Lección 31

Cálculo del volumen de cilindros y conos 248

Lección 32

Variación lineal y cuadrática 254

Lección 33

Equiprobabilidad en juegos de azar 260

Para saber más 266

Evaluación tipo PISA 268

Fuentes de información

Para el estudiante 270

Para el docente 271

Electrónicas 272

Consultadas 272

Dosificación

Semana sugerida	Calendarización	Aprendizajes esperados	Eje	Tema	
Bloque 1					
1		Evaluación diagnóstica			
2		<ul style="list-style-type: none"> Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes. 	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	
3			Foma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	
4			Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones	
5				Nociones de probabilidad	
6				Análisis y representación de datos	
7					
8					
Evaluación tipo PISA					
Bloque 2					
9		<ul style="list-style-type: none"> Explica el tipo de transformación [reflexión, rotación o traslación] que se aplica a una figura para obtener la figura transformada. Identifica las propiedades que se conservan. Resuelve problemas que implican el uso del teorema de Pitágoras. 	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	
10			Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	
11				Medida	
12			Manejo de la información	Nociones de probabilidad	
13					
14					
Evaluación tipo PISA					
Bloque 3					
15		<ul style="list-style-type: none"> Resuelve problemas que implican el uso de ecuaciones de segundo grado. 	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones	© SANTILLANA
16			Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos	
17					
18					

	Contenido	Lección	Páginas
	<ul style="list-style-type: none"> 1 Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas. 	1. Problemas con ecuaciones cuadráticas	18-23
	<ul style="list-style-type: none"> 2 Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades. 	2. Construcción de figuras congruentes y semejantes	24-31
	<ul style="list-style-type: none"> 3 Explicitación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada. 	3. Criterios de congruencia y semejanza	32-39
	<ul style="list-style-type: none"> 4 Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad. 	4. Gráficas, tablas y expresiones algebraicas	40-47
	<ul style="list-style-type: none"> 5 Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas. 	5. Relaciones de variación cuadrática	48-53
	<ul style="list-style-type: none"> 6 Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes. 	6. Complementarios, mutuamente excluyentes e independientes	54-59
	<ul style="list-style-type: none"> 7 Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación. 	7. Diseño y análisis de un encuesta	60-65
			66-69
	<ul style="list-style-type: none"> 1 Uso de ecuaciones cuadráticas para modelar situaciones y resolverlas usando la factorización. 	8. Ecuaciones cuadráticas por factorización	72-77
	<ul style="list-style-type: none"> 2 Análisis de las propiedades de la rotación y de la traslación de figuras. 	9. Rotación y traslación	78-85
	<ul style="list-style-type: none"> 3 Construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y la traslación de figuras. 	10. Simetría axial, rotación y traslación	86-93
	<ul style="list-style-type: none"> 4 Análisis de las relaciones entre las áreas de los cuadrados que se construyen sobre los lados de un triángulo rectángulo. 	11. Cuadrados y triángulo rectángulo	94-99
	<ul style="list-style-type: none"> 5 Explicitación y uso del teorema de Pitágoras. 	12. El teorema de Pitágoras	100-105
	<ul style="list-style-type: none"> 6 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes y de eventos complementarios (regla de la suma). 	13. Mutuamente excluyentes y complementarios	106-113
			114-117
	<ul style="list-style-type: none"> 1 Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas. Aplicación de la fórmula general para resolver dichas ecuaciones. 	14. Ecuaciones de segundo grado	120-125
	<ul style="list-style-type: none"> 2 Aplicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas. 	15. Congruencia y semejanza de triángulos	126-131
	<ul style="list-style-type: none"> 3 Resolución de problemas geométricos mediante el teorema de Tales. 	16. El teorema de Tales	132-137
	<ul style="list-style-type: none"> 4 Aplicación de la semejanza en la construcción de figuras homotéticas. 	17. Figuras homotéticas	138-145

Semana sugerida	Calendarización	Aprendizajes esperados	Eje	Tema
19		<ul style="list-style-type: none"> Resuelve problemas de congruencia y semejanza que implican utilizar estas propiedades en triángulos o en cualquier figura. 	Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones
20				
21				Nociones de probabilidad

Evaluación tipo PISA

Bloque 4

22		<ul style="list-style-type: none"> Utiliza en casos sencillos expresiones generales cuadráticas para definir el <i>n</i>ésimo término de una sucesión. Resuelve problemas que implican el uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. Calcula y explica el significado del rango y la desviación media. 	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones
23			Forma, espacio y medida	Figuras y cuerpos
24				Medida
25				
26				
27			Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones
28				Análisis y representación de datos

Evaluación tipo PISA

Bloque 5

29		<ul style="list-style-type: none"> Resuelve y plantea problemas que involucran ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y ecuaciones de segundo grado. Resuelve problemas que implican calcular el volumen de cilindros y conos o cualquiera de las variables que intervienen en las fórmulas que se utilicen. Anticipa cómo cambia el volumen al aumentar o disminuir alguna de las dimensiones. Lee y representa, gráfica y algebraicamente, relaciones lineales y cuadráticas. Resuelve problemas que implican calcular la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes. 	Sentido numérico y pensamiento algebraico	Patrones y ecuaciones
30			Forma, espacio y medida	Medida
31				
32				
33			Manejo de la información	Proporcionalidad y funciones
34				Nociones de probabilidad

Evaluación tipo PISA

	Contenido	Lección	Páginas
	<ul style="list-style-type: none"> 1 Lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas para modelar diversas situaciones o fenómenos. 	18. Gráficas de funciones cuadráticas	146-153
	<ul style="list-style-type: none"> 2 Lectura y construcción de gráficas formadas por secciones rectas y curvas que modelan situaciones de movimiento, llenado de recipientes, etcétera. 	19. Curvas que modelan situaciones en movimiento	154-161
	<ul style="list-style-type: none"> 3 Cálculo de la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes (regla del producto). 	20. Probabilidad de eventos independientes	162-167
			170-171
	<ul style="list-style-type: none"> 4 Obtención de una expresión general cuadrática para definir el <i>n</i>ésimo término de una sucesión. 	21. Sucesiones cuadráticas	174-179
	<ul style="list-style-type: none"> 5 Análisis de las características de los cuerpos que se generan al girar sobre un eje, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un rectángulo. Construcción de desarrollos planos de conos y cilindros rectos. 	22. Sólidos de revolución	180-187
	<ul style="list-style-type: none"> 6 Análisis de las relaciones entre el valor de la pendiente de una recta, el valor del ángulo que se forma con la abscisa y el cociente del cateto opuesto sobre el cateto adyacente. 	23. Pendiente de una recta	188-195
	<ul style="list-style-type: none"> 7 Análisis de las relaciones entre los ángulos agudos y los cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo. 	24. Ángulos agudos de un triángulo rectángulo	196-203
	<ul style="list-style-type: none"> 8 Explicación y uso de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. 	25. Razones trigonométricas	204-209
	<ul style="list-style-type: none"> 9 Cálculo y análisis de la razón de cambio de un proceso o fenómeno que se modela con una función lineal. Identificación de la relación entre dicha razón y la inclinación o pendiente de la recta que la representa. 	26. Razón de cambio y pendiente de una recta	210-215
	<ul style="list-style-type: none"> 10 Medición de la dispersión de un conjunto de datos mediante el promedio de las distancias de cada dato a la media (desviación media). Análisis de las diferencias de la "desviación media" con el "rango" como medidas de la dispersión. 	27. Desviación media en un conjunto de datos	216-221
			224-225
	<ul style="list-style-type: none"> 11 Resolución de problemas que implican el uso de ecuaciones lineales, cuadráticas o sistemas de ecuaciones. Formulación de problemas a partir de una ecuación dada. 	28. Distintos tipos de ecuaciones	228-233
	<ul style="list-style-type: none"> 12 Análisis de las secciones que se obtienen al realizar cortes a un cilindro o a un cono recto. Cálculo de las medidas de los radios de los círculos que se obtienen al hacer cortes paralelos en un cono recto. 	29. Secciones cónicas	234-241
	<ul style="list-style-type: none"> 13 Construcción de las fórmulas para calcular el volumen de cilindros y conos, tomando como referencia las fórmulas de prismas y pirámides. 	30. Volumen de cilindros y conos	242-247
	<ul style="list-style-type: none"> 14 Estimación y cálculo del volumen de cilindros y conos o de cualquiera de las variables implicadas en las fórmulas. 	31. Cálculo del volumen de cilindros y conos	248-253
	<ul style="list-style-type: none"> 15 Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades. 	32. Variación lineal y cuadrática	254-259
	<ul style="list-style-type: none"> 16 Análisis de las condiciones necesarias para que un juego de azar sea justo, con base en la noción de resultados equiprobables y no equiprobables. 	33. Equiprobabilidad en juegos de azar	260-265
			268-269

Representación de ecuaciones cuadráticas en la historia

Diversos personajes han hecho aportes al álgebra para desarrollarla como la conocemos. Los árabes, a lo largo de la edad de oro del mundo musulmán, entre los años 700 y 1200 d. de C., tradujeron y divulgaron los conocimientos de la Grecia antigua e India, y lograron gran desarrollo en álgebra y trigonometría.

El más recordado de los matemáticos árabes es Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi. En su tratado sobre álgebra, Al-Khwarizmi explica cómo resolver ecuaciones cuadráticas. Al-Khwarizmi indicaba con palabras el planteamiento y la solución de las ecuaciones; por ejemplo, esta es parte de una de sus explicaciones para resolver una ecuación cuadrática: "El método de resolución consiste en esto: toma la mitad de las raíces, que es cinco, la multiplicas por sí misma, lo que da veinticinco..." Como puedes ver, no hay letras ni símbolos algebraicos.

Fue en el siglo XVI cuando se introdujeron los símbolos para plantear ecuaciones. François Viète (1540-1603) tuvo gran influencia en ello, pues propuso usar "parámetros" por primera vez en la histo-

ria de las matemáticas. La idea de los parámetros es fundamental en matemáticas. Hasta entonces, en álgebra se estudiaban casos especiales, y se resolvían ecuaciones con coeficientes específicos, pero no existía un modelo que representara "todas" las ecuaciones cuadráticas (de forma similar a como en geometría un diagrama de triángulo ABC representaba "todos" los triángulos).

Viète utilizó las letras del alfabeto para simbolizar términos variables y constantes: las vocales para representar incógnitas, y las consonantes para las magnitudes o números dados o supuestamente conocidos (parámetros). Su notación tiene diferencias en comparación con la actual, pero fue un gran avance en relación con la descripción en palabras. Por ejemplo, una expresión como: $2x^2 - 5x = 23$, Viète la escribiría como $2Aq - 5A \text{aeq } 23$, donde A es la incógnita, q , el cuadrado y aeq significa "igual".

Viète facilitó el estudio de las ecuaciones, con lo que el álgebra pudo estudiar clases de ecuaciones y concentrarse en la estructura de los problemas y no en su forma particular.

➤ Lee y subraya las respuestas correctas. Después responde.

1. Las explicaciones sobre las ecuaciones cuadráticas en los tratados árabes incluían:

- A) símbolos. B) palabras. C) números. D) consonantes.

2. ¿Cuál fue la aportación de François Viète al álgebra actual?

- A) Estudiar varias clases de ecuaciones B) Solucionar ecuaciones específicas
C) Usar letras del alfabeto en el álgebra D) Plantear parámetros para geometría

3. ¿Cuál fue la principal aportación de los matemáticos árabes? _____

4. ¿La forma como planteaba las ecuaciones Viète era mejor que la usada por Al-Khwarizmi? Explica por qué. _____



El descenso en paracaídas, conocido como caída libre, es un movimiento uniforme acelerado cuya velocidad inicial es cero. La aceleración que actúa sobre los cuerpos es la de gravedad. Mediante una ecuación cuadrática se puede determinar la altura de la que se lanzan los paracaidistas o su velocidad final.

Presentación del bloque

Aprendizajes esperados:

- Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.

Problemas con ecuaciones cuadráticas

Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico

Tema: Patrones y ecuaciones

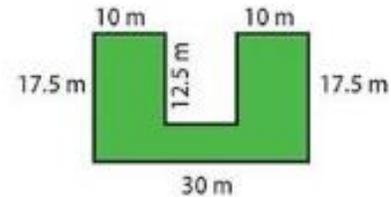
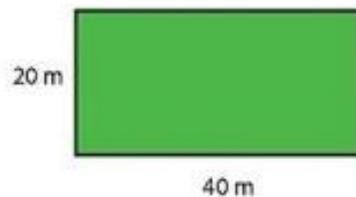
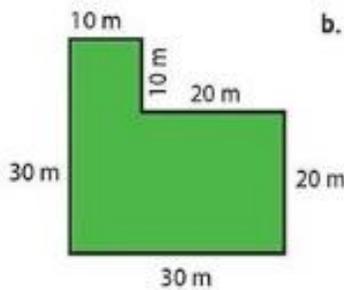
Contenido: Resolución de problemas que impliquen el uso de ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas

El desarrollo inmobiliario

1. Lee la información y resuelve.

Para la construcción de un desarrollo inmobiliario, el arquitecto Balderas tiene el reto de diseñar una casa muestra cuyo perímetro mida 120 m, de manera que tenga la máxima área posible sin utilizar medidas fraccionarias.

- Si fueras el arquitecto Balderas, ¿qué forma propondrías para la casa? ¿Qué medidas usarías para cumplir las dos condiciones dadas?
- Analiza las propuestas de los asistentes del arquitecto Balderas.



- ¿Cuál de las figuras anteriores tiene mayor área? Explica. _____
- El arquitecto Balderas se inclinó por la forma rectangular, pero sabe que el diseño presentado no ocupa la máxima área posible para un rectángulo, cuyo perímetro sea 120 m.
 - ¿Estás de acuerdo con el arquitecto? Justifica. _____
 - Discutan en parejas qué medidas debe tener un rectángulo que cumpla las condiciones dadas por el arquitecto y registrenlas en su cuaderno.
 - Uno de los asistentes propuso que las medidas fueran 30 m de largo y 30 m de ancho.
 - ¿Las medidas cumplen con las condiciones dadas? Sustenten su respuesta. _____
 - Supongan que el largo del terreno mide a m y el ancho mide $a + 2$ m.
 - ¿Qué expresión algebraica representa el perímetro del terreno? _____
 - ¿Qué **expresión algebraica** representa el área del terreno? _____
 - Reflexionen. ¿Cómo pueden determinar el valor de a ?
- Comparen sus respuestas con sus compañeros y discutan la última pregunta. Lleguen a acuerdos y registren sus conclusiones en su cuaderno.

Glosario

expresión algebraica.

Es una combinación de letras y números con signos de operación.

$y = \frac{1}{2}x - 10$ es una expresión algebraica.

Área máxima, mismo perímetro

2. Lean en pareja la información y resuelvan en su cuaderno.

a. Como el arquitecto Balderas quiere que la casa muestra incluya un jardín con perímetro de 40 metros, propone que el largo mida 6 m más que el ancho.

- Representen algebraicamente la propuesta del arquitecto: _____
- ¿Cuál es la medida del largo y la del ancho del terreno que ocupará el jardín de la casa? Expliquen cómo obtuvieron la respuesta. _____

- ¿Cuál es el área del terreno? _____
- La propuesta anterior, ¿representa el área máxima que puede ocupar un rectángulo con perímetro de 40 m? Justifiquen. _____

b. Completa la tabla que muestra cómo varía la medida de cada lado del terreno rectangular del jardín al mantener constante la medida del perímetro.

Largo (m)	Ancho (m)	Perímetro (m)	Expresión que representa el área	Área (m ²)
$a + 6$	a	40		
$a + 8$	a	40		
$a + 9$	a	40		
$a + 10$	a	40		

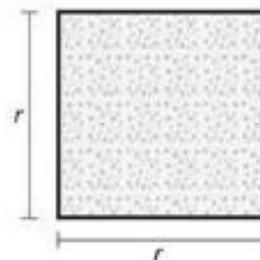
- ¿Qué hicieron para determinar el área en cada caso? _____
- Reflexionen. ¿Qué diferencia hay entre las expresiones que representan el área del jardín y las de la forma $ax + b$ que trabajaron en segundo grado?

➤ Socialicen sus respuestas y, en grupo, comenten qué tipo de expresiones representan al área del jardín y las estrategias que siguieron para resolverlas. Con ayuda del profesor revisen sus procedimientos.

3. Analiza la información y haz lo que se solicita.

Para otro proyecto, el arquitecto Balderas quiere conocer la cantidad de material necesario para cimentar una casa, pero solo cuenta con las medidas del cuadrado que se muestra, el cual representa la superficie de una de las ocho casas.

- a. ¿Cuál es el área del cuadrado? _____
- b. Si el estacionamiento ocupará $\frac{1}{6}$ del largo y $\frac{1}{2}$ del ancho de la casa, ¿cuál será su área? _____



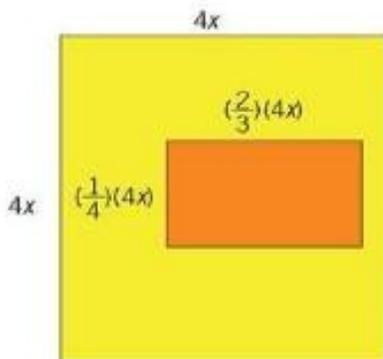
- Representa en la figura el espacio que tendrá el estacionamiento.

- c. La tabla muestra las áreas de las habitaciones que tendrá cada una de las casas del desarrollo. Completa la información.

	Largo (m)	Ancho (m)	Área (m ²)
Casa	r	r	r^2
Cocina	$\frac{1}{6}r$	r	
Baño	$\frac{1}{6}r$		$\frac{1}{12}r^2$
Sala-comedor	Es el doble del baño	r	
Recámara	$\frac{1}{3}r$	r	
Estacionamiento	$\frac{1}{6}r$	$\frac{1}{2}r$	

- Suma las expresiones algebraicas del área de la cocina, baño, sala-comedor, recámara y estacionamiento.
 - ¿Qué resultado se obtiene? _____
- d. Escribe el área total de la casa como la suma de las áreas de las habitaciones que la forman. _____
- Compara tus expresiones algebraicas con las de otros compañeros y validalas con la guía del profesor. Si hay dudas, coméntenlas para solucionarlas.

4. Analiza el diseño de la izquierda y responde.



- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el área en color anaranjado? _____
- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el área total del cuadrado? _____
- Si el área total es de 144 cm^2 , ¿cuál es la expresión algebraica que la representa? _____
- ¿Cuál es la medida de cada lado del cuadrado? _____
- ¿Cuánto mide el largo del rectángulo anaranjado? _____
- ¿Cuánto mide el ancho del rectángulo anaranjado? _____
- ¿Cuál es el área del rectángulo anaranjado? _____

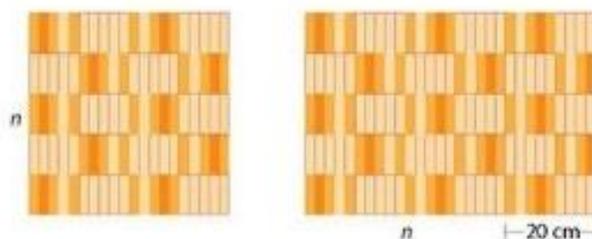
- Comparte tus respuestas con las de otros compañeros.

De cuadrado a rectángulo

5. Analicen el siguiente problema y resuelvan en su cuaderno.

a. Un artesano trabaja el ónix. Para elaborar una lámpara, necesita una placa cuadrada que mide n cm de lado; después le agrega una tira rectangular de 20 cm como se muestra:

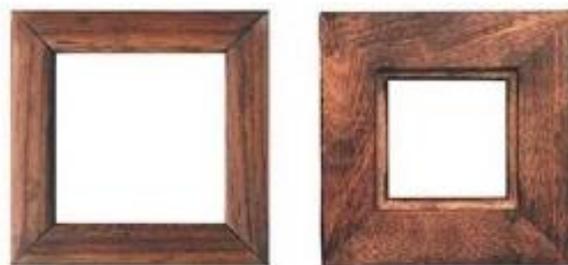
- ¿Cuáles son las medidas del largo y ancho de la tira rectangular?
- ¿Cuál es la medida del área de la tira rectangular?
- ¿Cuál es el área del cuadrado original en términos de n ?
- ¿Qué expresión algebraica muestra el área de la placa final?
- Si la cantidad de ónix utilizada es de 300 cm^2 , ¿cuáles son las medidas de la placa inicial, es decir, cuánto vale n ?
- Describan el procedimiento que siguieron para resolver la actividad.



6. En equipo, lean y respondan.

El mismo artesano hizo un convenio con una tienda departamental para fabricar portarretratos de madera, como los que se muestran a la derecha.

La figura 1 representa las medidas de un portarretrato. La madera que usarán de fondo es la que se encuentra en color rosa.



Modelos para portarretratos.

- a. ¿Cuál es el área total del portarretratos? _____
- b. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas determina el área del fondo del portarretratos (área rosa)? _____

- $(40 - x)(40 - x)$ • $(40 + 2x)(40 - 2x)$ • $(40 + 2x)^2$ • $4x^2 - 160x + 1600$
- ¿La expresión algebraica que determina el fondo del portarretratos es de la forma $ax^2 + bx + c$? Justifiquen.

- c. Completen la tabla, determinen el grosor del marco en cada caso, es decir, el valor de x . Consideren que todos los portarretratos miden 40 cm de lado y que el grosor máximo del marco es de 8 cm.

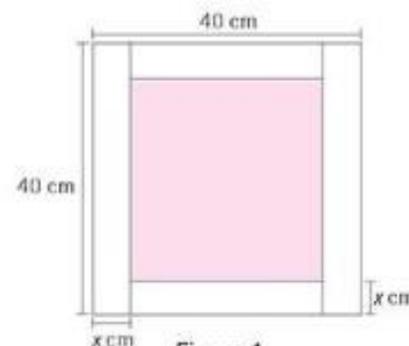


Figura 1

Área del portarretrato	Área del fondo $4x^2 - 160x + 1600 =$	Medida de x (cm)	Área que ocupa el marco $1600 - (4x^2 - 160x + 1600)$
1600 cm ²	1296 cm ²	2	
	784 cm ²		
	1156 cm ²		
	900 cm ²		

- Compartan sus inquietudes y estrategias de solución con las de otros equipos. De ser necesario, soliciten apoyo del profesor para trabajar en grupo.

Glosario

operaciones inversas.

Operaciones que revierten los efectos de otra operación. La operación inversa a la potenciación es la raíz cuadrada.

7. Analicen la información y realicen lo que se indica.

Expresiones algebraicas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ representan una **ecuación cuadrática** o de segundo grado. En ellas, en uno de sus términos, la incógnita se encuentra elevada a la segunda potencia y se conoce como **término cuadrático**, siendo este el de mayor valor en el exponente y con coeficiente diferente de cero (a , b y c son números reales). Algunas de estas expresiones se pueden resolver utilizando recursos como el tanteo u **operaciones inversas**. Por ejemplo, se sabe que la operación inversa a la potenciación es la raíz cuadrada. Los términos de esta fórmula se llaman: ax^2 , término cuadrático; bx , término lineal y c , término independiente.

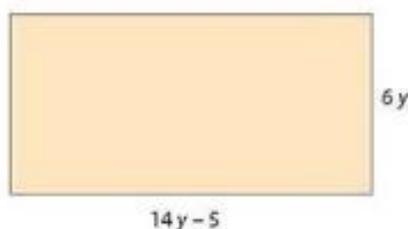
- Verifiquen en cuáles de los problemas resueltos se cumple lo anterior.
- Comparen los procedimientos utilizados para resolverlos y lleguen a acuerdos.

➤ Comenten la información en grupo y registren sus conclusiones.

Operaciones inversas

8. Escriban la expresión algebraica que representa cada caso y resuélvanla.

- La mitad del cuadrado de un número menos 300 da como resultado 500, ¿cuál es ese número? _____
 - Expresión algebraica: _____ Solución: _____
 - Si al valor de este número le aumentamos 10, ¿cuál es el nuevo resultado? _____
 - Si se le vuelve a aumentar 10 al resultado, ¿qué se obtiene? _____
- Determinen el área del rectángulo:



- Expresión algebraica: _____ Valor de y : _____
 - Área del rectángulo: _____
- La suma de los cuadrados de dos enteros impares consecutivos es 202. ¿Cuáles son esos dos números? _____
 - La diferencia de los cuadrados de dos números pares consecutivos es 52. ¿Cuáles son esos números? _____
 - En el trinomio $ax^2 + 3x + 7 = 15$, ¿cuánto vale a cuando x es igual a 1? _____
 - El doble del cuadrado de un número más cuatro veces el mismo número más 2 es igual a 50. ¿Cuál es el valor de ese número? _____
- Compartan con el grupo sus resultados. Comenten sus inquietudes y las estrategias que aplicaron.

9. Escriban la ecuación cuadrática asociada a cada enunciado.

Enunciado	Ecuación
El área de un rectángulo mide 66 cm^2 ; la medida del largo mide 5 metros más que el ancho. ¿Cuáles son las medidas del largo y ancho del rectángulo?	
El doble del cuadrado de un número más cuatro veces el mismo número más 15 es igual a 175. ¿Cuál es el valor de ese número?	
La suma del cuadrado de dos enteros impares consecutivos es 130. ¿Cuáles son esos dos números?	
La diferencia del cuadrado de dos enteros pares consecutivos es 44. ¿Cuáles son esos dos números?	

➤ Comparen sus respuestas con las de otros compañeros para validarlas. Después, propongan un enunciado y la ecuación cuadrática que lo representa.

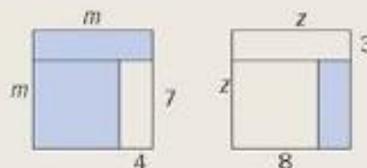
- Resuelvan las ecuaciones en grupo; si hay dudas o dificultades, consulten a su maestro.
- ¿Cuáles son las ventajas de representar mediante una ecuación cuadrática los planteamientos anteriores? Expliquen.

Reto Datos desconocidos

1. En parejas, lean y realicen en su cuaderno lo que se propone.

- Un alumno de secundaria afirma que si un número a se eleva al cuadrado, se obtiene una ecuación cuadrática, lo cual significa que a aumenta al doble y en otros casos cuatro veces. ¿Están de acuerdo con el alumno? Expliquen.
- El mismo alumno afirma que si se da la expresión $m^2 = 120$ y se quiere conocer el valor de m , basta con elevar a la $\frac{1}{2}$ ambos términos de la ecuación. ¿Estás de acuerdo con el alumno? Expliquen y determinen el valor de m .
- ¿Las ecuaciones cuadráticas únicamente modelan el área de figuras geométricas? Escriban un ejemplo que justifique su respuesta.
- ¿Una expresión lineal puede representar el área de un rectángulo, por ejemplo $x + 5$? Argumenten su respuesta.

2. Escriban la expresión algebraica que determina el área sombreada en azul de los siguientes cuadrados.



➤ Socialicen sus respuestas y registren sus acuerdos. Además indiquen qué implica resolver problemas asociados a ecuaciones cuadráticas sencillas, utilizando procedimientos personales u operaciones inversas.

Apoyo tecnológico

En el siguiente sitio encontrarás el interactivo "Ecuaciones no lineales".

www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b02_t01_s01_descartes/index.html

En esta dirección descarga el archivo "Hoja para el alumno" y realiza las actividades 1 y 2 de la sesión 1.

www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/3_tercero/3_Matematicas/INTERACTIVOS/3m_b02_t01_s02_aulademedios/index.html

Comparte tus experiencias en clase, y si hay dudas, pide apoyo al profesor. [consulta: 14 de noviembre de 2013]

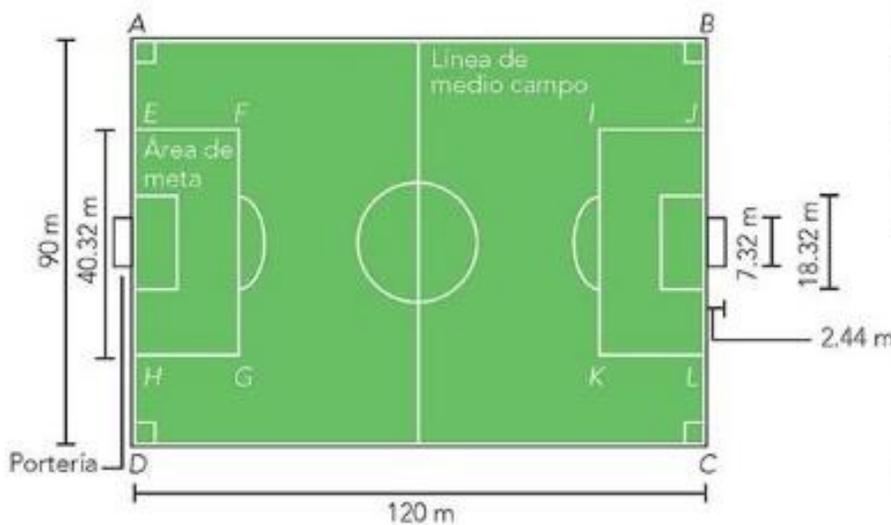
Construcción de figuras congruentes y semejantes

Eje: Forma, espacio y medida
Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Construcción de figuras congruentes o semejantes (triángulos, cuadrados y rectángulos) y análisis de sus propiedades

La cancha de futbol

1. En pareja, analicen la cancha de futbol y contesten lo que se pide.



En un centro deportivo, como parte de las actividades de promoción del deporte, se pintarán las líneas de las canchas de futbol. Para hacerlo, los responsables hicieron el esquema de la izquierda.

- a. ¿Consideran que el esquema de la cancha de futbol es simétrico? ¿Por qué? _____
- ¿Cuál es el eje de simetría? _____
 - Comparen las figuras de cada medio campo. ¿Qué observan? _____

- Si esta línea se trazara a 70 m de alguna de las porterías, se conservarían las propiedades de la simetría que identificaron? Argumenten. _____

b. Al hacer el esquema de la cancha se consideraron las medidas reglamentarias. Comprueben que \overline{EF} mide lo mismo que \overline{KL} . Describan el procedimiento que siguieron. _____

- Usen su compás y comprueben que \overline{FG} , \overline{JL} y \overline{EH} miden lo mismo.
- ¿Cómo son \overline{HG} e \overline{IJ} ? _____ Expliquen su procedimiento y justifiquen sus resultados. _____

c. Analicen la información: **Dos segmentos son congruentes si tienen la misma medida.**

- Tracen varios **segmentos** y pidan a otros compañeros que los reproduzcan en su cuaderno. Verifiquen que sean congruentes.

➤ Socialicen sus respuestas y procedimientos. Con la ayuda del profesor validen sus resultados.

Glosario

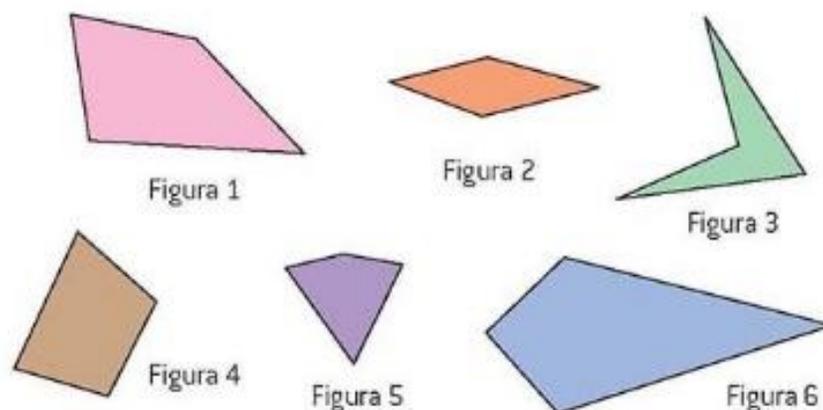
segmento de recta.

Parte de recta comprendida entre dos puntos. El segmento comprendido entre los puntos A y B se denota como \overline{AB} .

Segmentos y ángulos congruentes

2. Reúnete con un compañero para hacer lo siguiente.

a. Nombren los vértices de las figuras. Luego, determinen cuáles tienen lados congruentes. Remarquen los lados correspondientes.



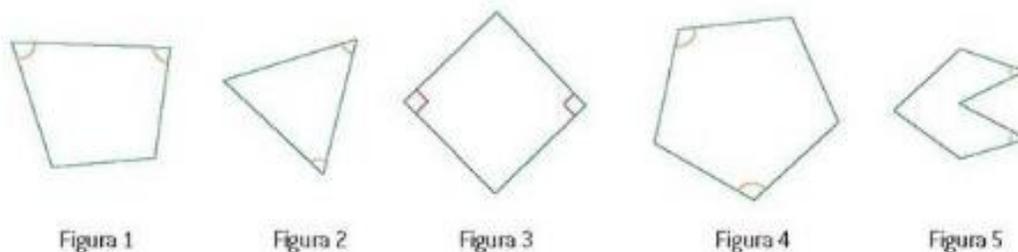
• ¿Cuáles figuras no tienen lados congruentes? _____

b. Propongan una estrategia para modificar las figuras y que estas tengan al menos un par de lados congruentes. Realicen la construcción en su cuaderno.

c. Argumenten por qué su construcción cumple con la condición solicitada.

➤ Comenten en grupo sus conclusiones y registren sus acuerdos.

3. Determinen si los ángulos resaltados en cada caso son congruentes. Justifiquen sus respuestas. Coméntenlas con otros compañeros.



a. ¿Cuántos ángulos congruentes tiene la figura 2? _____

b. ¿Todos los triángulos tienen el mismo número de ángulos congruentes? _____

c. ¿Cuántos ángulos congruentes tiene un hexágono regular? _____

d. Reflexionen: "Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida".

e. Analicen la cancha de fútbol e identifiquen cuáles ángulos son congruentes.

f. En grupo, con base en lo que han trabajado, expliquen qué es *congruencia* y en su cuaderno tracen figuras con:

- dos lados congruentes.
- dos ángulos congruentes.

➤ Clasifiquen las figuras que trazaron y determinen otras de sus características.

Arte en plata

4. En pareja, lean la información y resuelvan el problema.

Un cliente solicitó a un joyero diseñar aretes que incluyeran tres triángulos congruentes. El joyero propuso los siguientes modelos.



Modelo 1: triada en plata



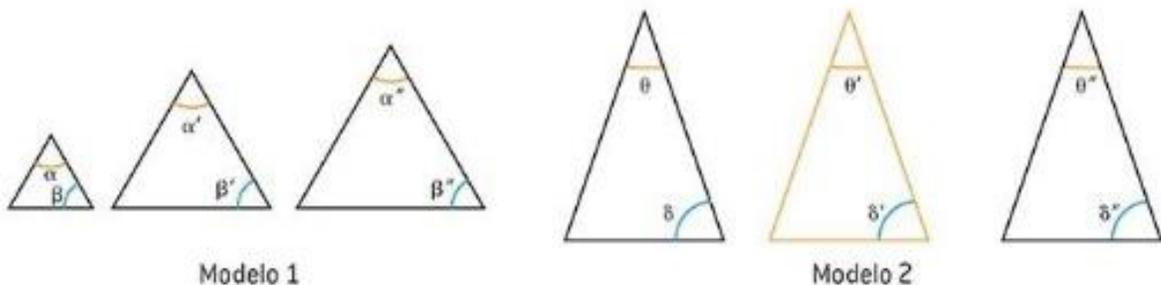
Modelo 2: triada en oro y plata

a. ¿Los modelos cumplen con las condiciones que el cliente solicitó? Justifiquen su respuesta. _____

- ¿Qué procedimiento deben seguir para comprobar si los tres triángulos que forman cada arete son congruentes? Escribanlo a continuación.

Modelo 1	Modelo 2

b. Los siguientes trazos son representaciones geométricas de los modelos 1 y 2. Analícenlos, hagan lo que se les solicita y respondan las preguntas. Argumenten cada caso.



Modelo 1

- Obtengan la medida del ángulo α y compárenla con la medida de los ángulos α' y α'' . ¿Cómo son las medidas de los tres ángulos entre sí? _____
- ¿Cómo son las medidas de los ángulos β , β' y β'' ? _____
- Nombren Ω , Ω' y Ω'' a los ángulos que no están marcados. ¿Los ángulos son congruentes? _____

Modelo 2

- ¿Cómo son las medidas de $\angle\theta$, $\angle\theta'$ y $\angle\theta''$? _____
 - ¿Los ángulos δ , δ' y δ'' son congruentes? _____
 - Nombren ε , ε' y ε'' a los ángulos que no están marcados. ¿Los ángulos son congruentes? _____
- c. Elijan dos triángulos del modelo 1 y nombrenlos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$; y a sus lados abc y $a'b'c'$, respectivamente.
- d. Elijan dos triángulos del modelo 2 y nombrenlos $\triangle EFG$ y $\triangle E'F'G'$, y a sus lados efg y $e'f'g'$.
- e. Midan los lados de los triángulos y completen la tabla. Después respondan.

Triángulo	Medida					
ABC	$a =$	$b =$	$c =$	$\frac{a}{a'} =$	$\frac{b}{b'} =$	$\frac{c}{c'} =$
$A'B'C'$	$a' =$	$b' =$	$c' =$			
EFG	$e =$	$f =$	$g =$	$\frac{e}{e'} =$	$\frac{f}{f'} =$	$\frac{g}{g'} =$
$E'F'G'$	$e' =$	$f' =$	$g' =$			

- ¿Qué significan los cocientes obtenidos en $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$? _____
- Discutan por qué se puede afirmar que los lados de los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen una relación de proporcionalidad. Anoten sus argumentos. _____
- ¿Cómo son los cocientes obtenidos en $\triangle EFG$ y $\triangle E'F'G'$? _____
- ¿Qué sucede con la medida de los lados de los triángulos EFG y $E'F'G'$? _____

- Socialicen sus respuestas y discutan cuándo dos figuras son congruentes y cuándo son semejantes. Lleguen a acuerdos y registren sus conclusiones.

f. Analicen la siguiente información y realicen lo que se indica.

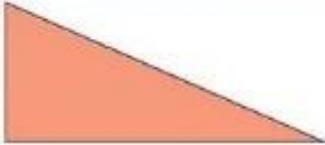
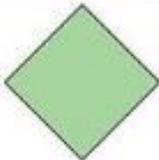
Dos polígonos son semejantes si los lados de uno son proporcionales a los lados correspondientes del otro y si los ángulos de uno miden lo mismo que los ángulos correspondientes del otro.

A la razón de dos lados correspondientes de dos figuras semejantes se le llama **razón de semejanza**.

- Con base en el concepto anterior, seleccionen el término que representa la propiedad de los triángulos estudiados en la página anterior y completen las conclusiones.
 - Congruentes
 - Semejantes
- Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son _____ porque _____
- Los triángulos EFG y $E'F'G'$ son _____ porque _____

➤ Socialicen sus argumentos y lleguen a acuerdos en grupo.

5. Tracen una figura semejante y una congruente a la figura original.

Figura original	Figura semejante	Figura congruente
		
		
		

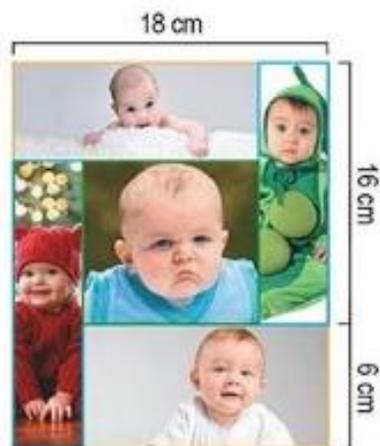
- a. De manera individual, analiza las figuras que trazaste y concluye. Después responde.
- ¿Qué razón de semejanza aplicaste al trazar las figuras? _____
 - Se puede afirmar que una figura es semejante a otra cuando _____
 - Se puede afirmar que una figura es congruente a otra cuando _____

➤ Socializa tus conclusiones con el grupo y susténtalas con ejemplos. Con ayuda del profesor lleguen a acuerdos.

¿Semejantes o congruentes?

6. En pareja, realicen lo que se pide.

Guadalupe utilizará un programa de fotografía que le permite incluir modelos geométricos con distintas imágenes. Ella quiere ampliar la fotografía que se muestra, de manera que el segmento que mide 6 cm, mida 15 cm.



a. Determinen las medidas de la fotografía ampliada.

- ¿Cuáles serían las medidas de los lados de los rectángulos amarillos?

- ¿Cuáles serían las medidas de los lados de los rectángulos azules?

- ¿Qué características comparten la fotografía original y la fotografía ampliada? Justifiquen su respuesta. _____

- ¿Cuál fue la razón de semejanza que se aplicó? _____
- Describan el procedimiento que siguieron para responder las preguntas anteriores.

b. En el cuaderno tracen una figura semejante a la que se muestra, en la que el segmento que mide x , mida $1.5x$ cm.

- ¿Cuánto miden los lados de la figura que trazaron? _____
- ¿Cómo lo calcularon? _____

- ¿Cuál es la razón de semejanza entre la fotografía original y la ampliada? Justifiquen. _____



c. Ahora consideren que $x = 5$ cm y determinen las medidas de las fotografías ampliadas con base en la razón de semejanza que se indica en la tabla.

	Razón de semejanza		
Medidas	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{2}{3}$
Lado			

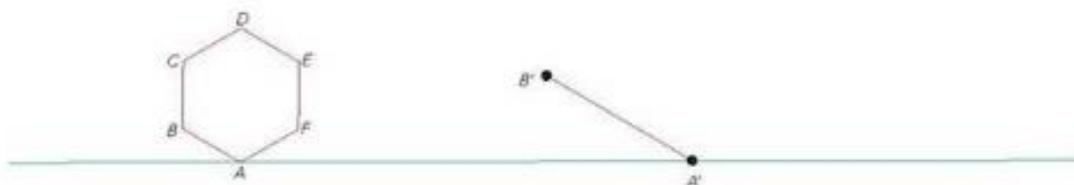
- ¿Las fotografías son semejantes o congruentes? ¿Por qué? _____

➤ Socialicen sus respuestas con el grupo, así como el procedimiento empleado. Si tienen dudas, extérnenlas al profesor.

Problemas de construcciones semejantes

7. De manera individual haz lo que se indica.

- a. Construye un hexágono regular semejante al que se muestra. Usa como referencia el segmento $A'B'$.



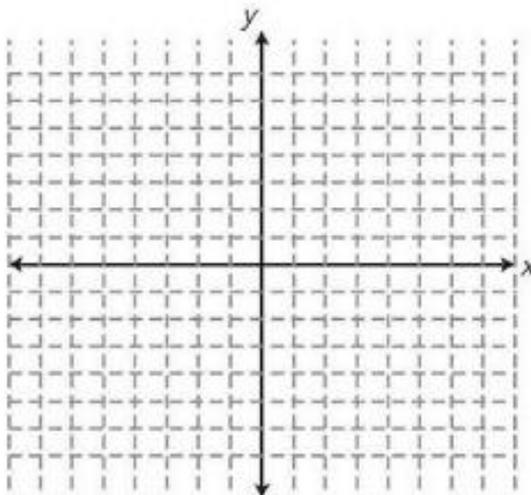
Glosario

lados homólogos.

Son los lados correspondientes de polígonos semejantes o congruentes.

- Compara los **lados homólogos** de ambos polígonos. Determina el factor de proporcionalidad entre ellos. _____
- Etiqueta los vértices y establece cómo son los ángulos correspondientes entre ambos hexágonos. Sustenta con argumentos. _____

- b. Ubica en el plano cartesiano los pares ordenados que se muestran y une los puntos. Explica si las figuras que se forman en cada caso son congruentes o semejantes. Si tienes acceso a un programa de geometría dinámica, realízalo en él.



Caso 1. $(0, -2)$, $(0, -4)$, $(-2, -2)$, y $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(1, 3)$

Caso 2. $(3, 2)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(3, 3)$ y $(2, -1)$, $(6, -1)$, $(6, -3)$, $(2, -3)$

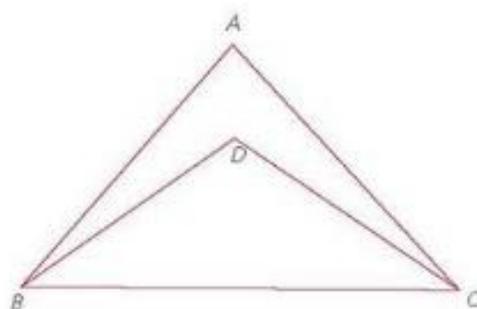
- Propón pares ordenados para construir dos figuras semejantes y dos congruentes. _____
- Determina el factor de proporcionalidad entre las figuras semejantes. _____

➤ Socializa con el grupo tus propuestas para validarlas.

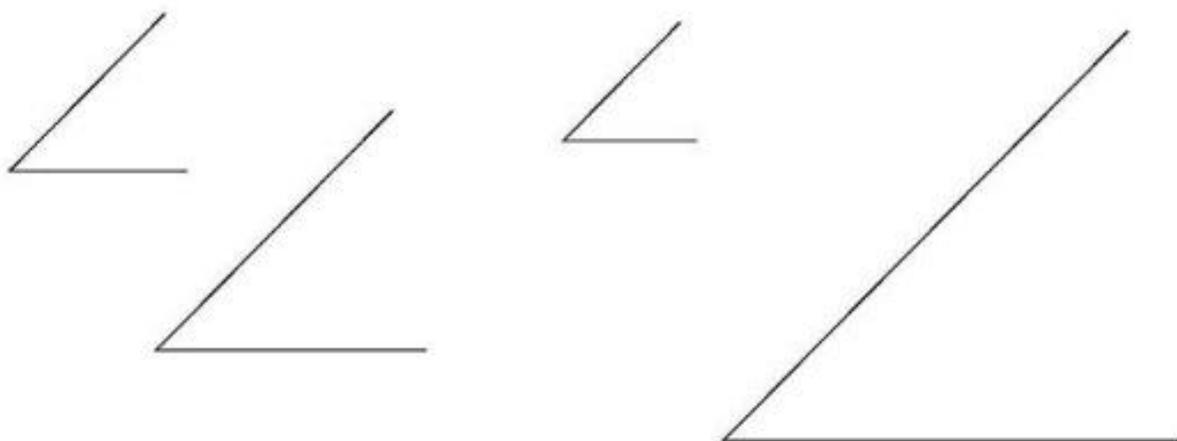
c. Analiza la figura y realiza lo que se indica.

- Determina los lados que son congruentes.
- Considera el segmento BC como eje de simetría y construye una figura simétrica a la que se muestra.
- ¿La figura que trazaste es congruente a la figura original?

Argumenta. _____



d. Completa los triángulos y justifica por qué se trata de una familia de figuras semejantes.



- Socializa tus respuestas y llega a acuerdos con el grupo. Discutan y registren acuerdos sobre las condiciones geométricas necesarias para construir figuras congruentes y figuras semejantes.

Reto

¿Congruente o semejante?

1. En pareja, resuelvan los problemas.

- a. Determinen en cada caso, cuáles figuras son congruentes y cuáles son semejantes. Argumenten sus respuestas.

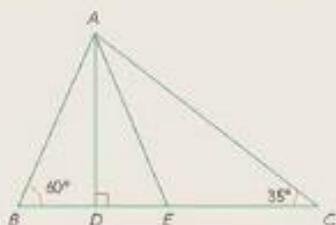


Figura 1

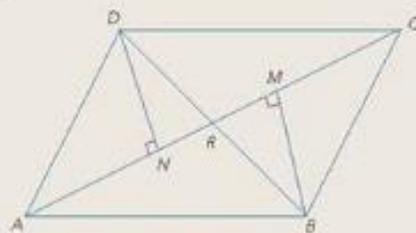


Figura 2

- b. En tu cuaderno, haz una construcción o composición geométrica con figuras semejantes y congruentes.

- Discutan en grupo sus experiencias: anoten las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para aclararlas.

Apoyo tecnológico

En estos sitios encontrarás más información sobre figuras semejantes:

tutoriaematicas.com/archivoCAR/Interactivo_Semejanza_Triangulos_Factor_Escala.html,
www.dmae.upct.es/~pepemar/mateprimero/trigonometria/angulos/ang semeja.htm

Discute con tus compañeros la información de las páginas y analicen sus ejemplos. [consulta: 14 de noviembre de 2013]

Criterios de congruencia y semejanza

Eje: Forma, espacio y medida

Tema: Figuras y cuerpos

Contenido: Explicación de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos a partir de construcciones con información determinada

Banderas y figuras congruentes

1. Lee la información y resuelve.



Bandera de Antigua y Barbuda



Bandera de Eritrea



Bandera de Seychelles



Bandera de Papua Nueva Guinea

Guadalupe participará en la ceremonia conmemorativa del día de la ONU y debe elaborar una bandera; puede elegir entre las tres opciones que se muestran a la izquierda.

a. Analiza las banderas y responde.

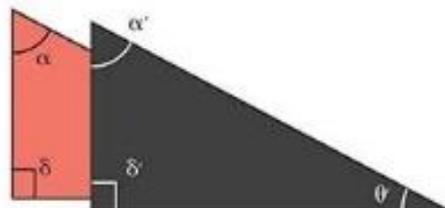
- Guadalupe afirma que los triángulos verde y azul de la bandera de Eritrea son congruentes. ¿Es correcto? ¿Por qué? _____
- Propón un procedimiento para comprobar que los triángulos rojos de la bandera de Antigua y Barbuda son congruentes. _____
- Aplica tu procedimiento y determina si los triángulos que conforman la bandera de Seychelles son congruentes. Argumenta. _____

➤ Socializa tus argumentos. Discute con el grupo los procedimientos que empleaste en la resolución de las preguntas anteriores y lleguen a acuerdos.

b. Mariana analizó la bandera de Papua Nueva Guinea y afirma que los triángulos que la forman son congruentes. Para comprobarlo hizo lo siguiente:



1. Trazó la diagonal del rectángulo.
2. Lo cortó por su diagonal.



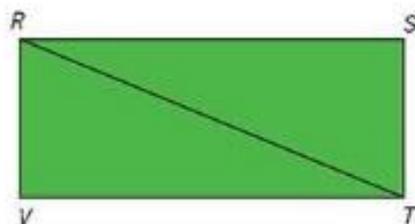
3. Superpuso los triángulos resultantes.

- ¿Coincides con la afirmación de Mariana? ¿Por qué? _____
- ¿Qué características hacen que los triángulos sean congruentes? _____
- ¿Cómo son los ángulos α y α' ? Justifica. _____
- ¿Puede ser $\angle \delta = \angle \delta'$? Argumenta. _____

➤ Comparte tus respuestas en grupo y registra los acuerdos.

2. En pareja, sigan el procedimiento y respondan.

- Tracen un rectángulo en papel grueso.
- Etiqueten sus vértices como R, S, T, V .
- Tracen una de sus diagonales y recórtenlo.
- ¿Qué tipo de triángulos se formaron? _____



a. Superpongan los triángulos formados. Escriban qué lados coinciden con los siguientes.

- RV : _____
- RS : _____

b. Obtengan la medida de los ángulos SRT y RTV .

- ¿Cómo son entre sí? _____ ¿Y los ángulos TRV y RST ? Argumenten. _____

- Si la bandera tuviera forma de cuadrado, ¿se obtendría el mismo tipo de triángulo?

¿Por qué? _____

c. Una pareja de estudiantes afirmó que los triángulos RST y RVT son congruentes.

¿Es correcto? Justifiquen su respuesta. _____

d. Los estudiantes concluyeron que "dos triángulos son congruentes si, al sobreponerlos, los lados y ángulos de uno miden lo mismo que los lados y ángulos correspondientes del otro". Analicen la conclusión y valídenla. _____

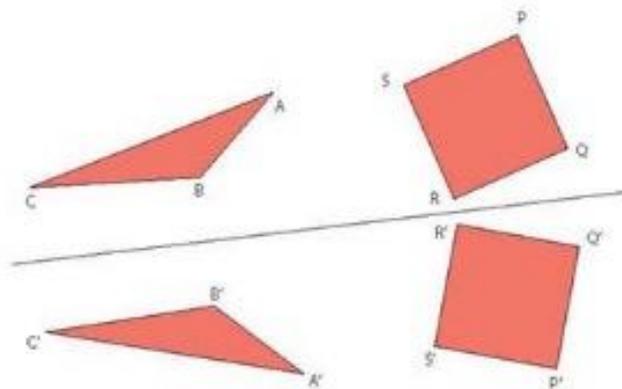
e. Lean y discutan la información, después completen sus conclusiones.

Para construir **triángulos congruentes** al trazar una diagonal de un cuadrilátero, los lados opuestos del cuadrilátero deben ser paralelos. Es decir, solo se obtienen triángulos congruentes en los paralelogramos.

➤ Socialicen sus conclusiones y, si hay dudas, soluciónenlas con ayuda del profesor.

Figuras congruentes

3. Analiza la construcción geométrica y realiza lo que se pide. Argumenta cada respuesta.



- a. En el caso de los triángulos:
- ¿ Los ángulos CAB y $C'A'B'$ son congruentes? _____
 - ¿ Los ángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes? _____
 - ¿ La medida de los ángulos internos de los ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son congruentes? ¿ Por qué? _____

b. En el caso de los cuadrados. ¿Cómo es la medida de los **ángulos consecutivos**? _____

- Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes. Marca en los cuadrados los ángulos opuestos.
- Explica qué condiciones son necesarias para que dos cuadrados sean congruentes.

- ¿ Estas condiciones se pueden generalizar para todos los paralelogramos? ¿ Por qué? _____

c. Determina si las figuras son congruentes. Usa el símbolo \cong , que indica congruencia.

- ΔABC _____ $\Delta A'B'C'$ • $RSPQ$ _____ $R'S'P'Q'$
- ¿ Dos figuras son congruentes cuando existe una relación de simetría axial? Justifica. _____
- ¿ Todas las figuras congruentes son simétricas? Argumenta y propón varios ejemplos para sustentar tus respuestas. _____

➤ Socializa tus respuestas y argumenta qué criterios determinan que dos figuras sean congruentes.

Glosario

ángulo consecutivo.

En un polígono dos ángulos son consecutivos cuando estos comparten el mismo lado.

En el ΔPQR , los ángulos δ y θ son consecutivos.



Construcción de triángulos congruentes

4. Construye en tu cuaderno los triángulos que se solicitan.

- Dos triángulos que tengan dos lados y el ángulo que forman entre ellos respectivamente iguales.
- Dos triángulos que tengan sus tres lados iguales.
- Dos triángulos que tengan un lado y ángulos consecutivos iguales.
- Dos triángulos que tengan dos lados, y el ángulo opuesto al mayor de ellos, iguales.

a. Compara tus construcciones con las de tus compañeros y responde las preguntas.

- ¿Las figuras que trazaste son congruentes? ¿Qué criterios utilizaste para determinarlo?

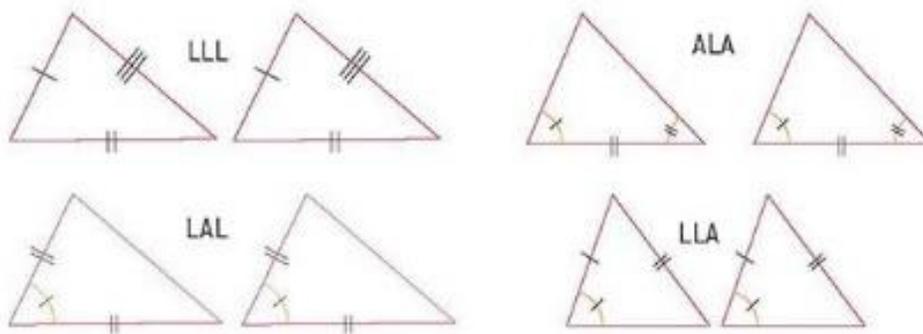
- ¿Estas condiciones se pueden generalizar para todo tipo de triángulo? Justifica tu respuesta.

► Comenta tus respuestas con el grupo y registra en tu cuaderno las conclusiones.

5. En grupo, analicen la información y compárenla con sus conclusiones.

Los criterios de congruencia de triángulos son las condiciones mínimas que permiten determinar si dos triángulos son congruentes. Los criterios son los siguientes:

- **Criterio LLL.** La medida de los tres lados de un triángulo es igual que la de los lados correspondientes del otro triángulo.
- **Criterio LAL.** Las medidas de dos lados de un triángulo, y la del ángulo que se forma entre ambos lados, son congruentes a los del otro triángulo.
- **Criterio ALA.** Las medidas de dos ángulos de un triángulo son congruentes a los dos ángulos correspondientes del otro triángulo. El lado que se encuentra entre ambos ángulos mide lo mismo que el lado correspondiente del otro triángulo.
- **Criterio LLA.** Las medidas de dos lados son iguales y el ángulo opuesto al mayor de ellos, mide lo mismo que el correspondiente.



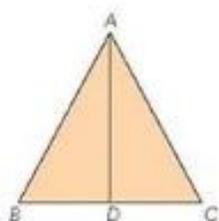
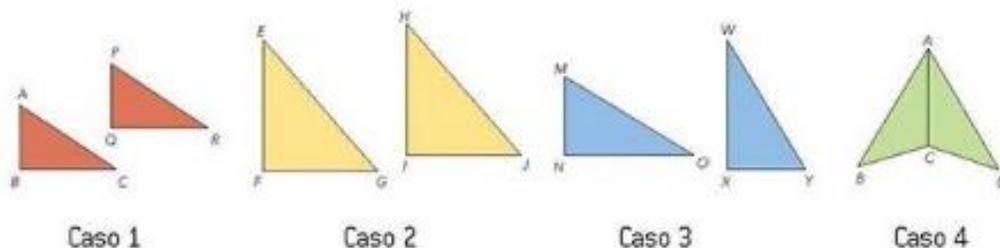
- ### a. Busquen objetos con formas triangulares que sean congruentes, describan sus propiedades y comprueben su congruencia.

► Registren sus acuerdos, si aún tienen dudas, soluciónenlas con ayuda de su profesor.

Identificación de congruencia en triángulos

6. Lee la información y responde.

- a. Analiza las parejas de triángulos y determina si son congruentes. Usa el signo \cong . Utiliza tu juego de geometría.

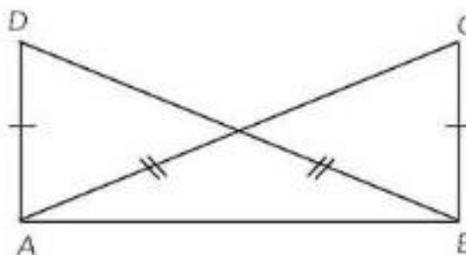


- b. En el triángulo de la izquierda, $\overline{AB} = \overline{AC}$, y D es el punto medio de \overline{BC} .

- Indica si los tres lados del $\triangle ADB$ y los correspondientes del $\triangle ADC$ son iguales. Justifica.

- ¿ $\triangle ADB \cong \triangle ADC$? Explica.
- ¿ $\angle B \cong \angle C$? ¿Por qué?

- c. Analiza la siguiente figura, donde $\overline{AC} = \overline{BD}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$.



- ¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta? Subráyala y justifícala.

$\triangle ABC \cong \triangle ABD$

$\triangle ABC \cong \triangle BAD$

- d. Construye en tu cuaderno el par de triángulos que corroboran el criterio de congruencia que se indica en cada caso.

- Dado que $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{FD}$ y $\overline{BC} = \overline{EF}$, se tiene que: $\triangle ACB \cong \triangle DFE$.

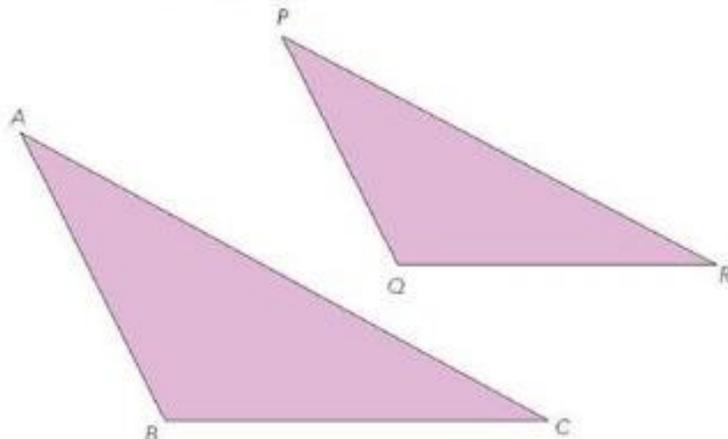
- Dado que $\overline{AD} = \overline{DB}$ y $\overline{AC} = \overline{CB}$ y en uno de ellos $\angle \delta + \angle \gamma = 90^\circ$, se tiene que: $\triangle ACD \cong \triangle BCD$.

- Comparte tus argumentos con tus compañeros y registra, en tu cuaderno, una conclusión acerca de lo realizado. Validen sus argumentos con su profesor.

Criterios de semejanza

7. Realicen en pareja estas actividades. Obtengan las medidas necesarias y registrenlas en las figuras correspondientes.

a. Analicen los triángulos y respondan.



- ¿Cómo es la medida de los ángulos del $\triangle ABC$ respecto del $\triangle PQR$? _____
- ¿Cuántos ángulos deben ser iguales para considerarlos triángulos semejantes? Explica. _____
- ¿Cómo es \overline{AB} con respecto de \overline{PQ} ? ¿Y cómo es \overline{AC} al compararlo con \overline{PR} ? ¿Y \overline{BC} con respecto de \overline{QR} ? ¿Qué relación pueden establecer? _____
- En grupo revisen sus respuestas y registren sus conclusiones. Después compárenlas con la siguiente información:

Criterios de semejanza de triángulos:

- Si en una pareja de triángulos los lados correspondientes son proporcionales, los triángulos son semejantes:

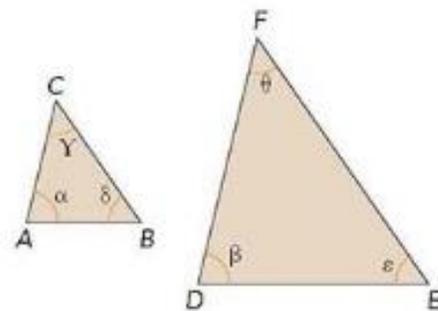
$$\frac{DF}{AC} = \frac{FE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

- Si en una pareja de triángulos dos ángulos de uno son iguales a dos ángulos de otro, entonces los triángulos son semejantes:

$$\alpha = \beta, \gamma = \theta, \delta = \varepsilon$$

- Si en una pareja de triángulos dos lados correspondientes son proporcionales y el ángulo comprendido entre estos es de igual medida, entonces los triángulos son semejantes:

$$\frac{DF}{AC} = \frac{FE}{CB}, \gamma = \theta$$



8. Une los puntos PQR y forma un triángulo. Luego, realiza lo que se indica y responde.

• Q

- Ubica un punto en \overline{QR} y llámalo Z .
- Traza una recta paralela a \overline{PR} que pase por el punto Z . Esta paralela cruzará \overline{PQ} ; a esta intersección llámala punto X .
- Traza una recta paralela a \overline{PQ} que pase por Z . Al punto donde se interseca la paralela con \overline{PR} llámalo W .
- Une los puntos XZQ y WZR . ¿Qué figuras se forman? _____

P •

• R

a. Considera que $\angle PQR = 80^\circ$, $\angle QRP = 49^\circ$ y $\angle RPQ = 51^\circ$, y determina la medida de los siguientes ángulos.

- $\angle XQZ$: _____
- $\angle QZX$: _____
- $\angle ZXQ$: _____
- $\angle WZR$: _____
- $\angle ZRW$: _____
- $\angle RWZ$: _____

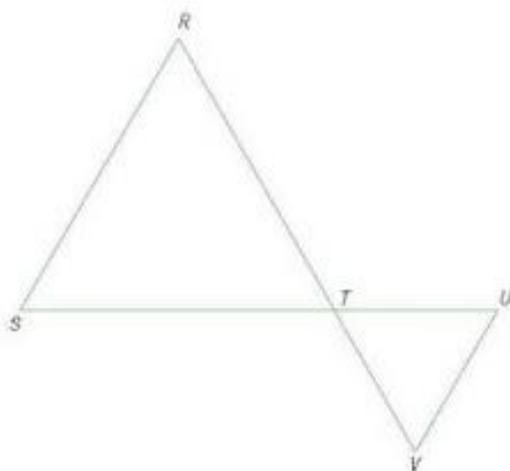
b. Si la longitud de $\overline{PQ} = 6.8$ cm, $\overline{QR} = 8$ cm y $\overline{RP} = 10.1$ cm, $\overline{WZ} = 3.4$ cm y $\overline{QZ} = 4$ cm:

- ¿Cuál es la medida de \overline{QX} y de \overline{XZ} ? _____
- ¿Cuánto mide \overline{WR} y \overline{ZR} ? _____

➤ Confronta con tus compañeros tus argumentos y respuestas. Si hay dudas, analicen los casos en grupo y, con ayuda del profesor, lleguen a acuerdos. Después registren sus conclusiones en el cuaderno.

9. En pareja, analicen si $\triangle SRT$ y $\triangle VTU$ son semejantes.

a. En la figura, \overline{RS} es paralelo a \overline{UV} ; establezcan la proporcionalidad de sus lados cuando $\overline{UV} = 3$ cm, $\overline{TV} = 4$ cm y $\overline{TR} = 12$ cm.

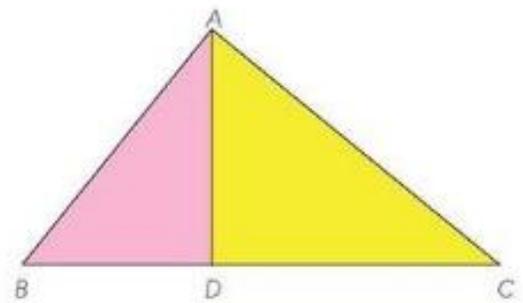


- ¿ $\triangle SRT$ y $\triangle VTU$ son semejantes? Argumenten sus respuestas aplicando los criterios de semejanza.

➤ Socialicen sus respuestas y registren sus acuerdos. Si les surgen dudas, resuélvanlas con ayuda del profesor.

10. En pareja, analicen la figura y respondan.

- Obtengan las medidas necesarias para comprobar que los $\triangle BAD$ y $\triangle DAC$ son semejantes.
- Expliquen si cada uno de los dos triángulos son semejantes al $\triangle ABC$.



➤ Socialicen sus respuestas y registren sus acuerdos. Si surgen dudas, coméntenlas en grupo con la finalidad de solucionarlas.

11. En grupo, redacten los criterios de congruencia y semejanza de triángulos; para cada caso, planteen un ejemplo.

Criterios de congruencia de triángulos	Criterios de semejanza de triángulos

Apoyo tecnológico

En este sitio podrás ampliar la información sobre los criterios de congruencia de triángulos. Estudia el tema de Geometría, Capítulo 4.

[www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/GeometriaInteractiva/GEOMETRIA Sandra Schmidt/Capitulo4/node13.htm](http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/GeometriaInteractiva/GEOMETRIA%20Sandra%20Schmidt/Capitulo4/node13.htm)

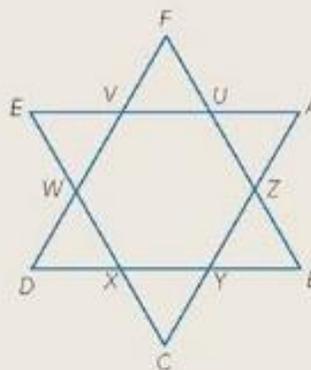
Discute con tus compañeros la información de la página y analiza los ejemplos propuestos. Realiza las actividades de Laboratorio 2, 3 y 4. [consulta: 14 de noviembre de 2013]

➤ Comparte tus experiencias en clase y, si hay dudas, pide apoyo al profesor.

Reto Congruente o semejante

1. En pareja, resuelvan los siguientes problemas.

- Determinen todos los triángulos congruentes que se forman en la figura de la derecha. De ser necesario, recurran al uso del juego de geometría. Expliquen los criterios que consideraron para responder.
- Determinen si $\triangle XCY$ es semejante a $\triangle DFB$. Expliquen los criterios que utilizaron.



➤ Escriban las dificultades a las que se enfrentaron al resolver los problemas y socialícenlas para que, en grupo, sean aclaradas. Con la ayuda del profesor determinen la veracidad de sus respuestas.

4

Gráficas, tablas y expresiones algebraicas

Eje: Manejo de la información

Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Análisis de representaciones (gráficas, tabulares y algebraicas) que corresponden a una misma situación. Identificación de las que corresponden a una relación de proporcionalidad

Servicios de banca en línea

1. Lee la información y resuelve.

Según un estudio elaborado por la Asociación Mexicana de Internet, el número de usuarios de este medio en México creció 14% durante 2011, hasta ser 40 600 000 usuarios. Respecto a sus ocupaciones más comunes, 44% afirmó usar operaciones de banca en línea; 29% dijo hacer compras en línea y 18% lo utiliza para buscar empleo.

Fuente: mexico.cnn.com/tecnologia/2012/05/17/los-usuarios-de-internet-aumentan-un-14-en-mexico-segun-un-estudio
[consulta: 12 de noviembre de 2013]

Al conocer los resultados del estudio, los dueños de los bancos se establecieron como objetivo duplicar el número de usuarios de la banca en línea durante los próximos nueve meses. Ellos consideran que, para alcanzar la meta programada, el aumento mensual en el número de usuarios debe ser constante.

- De acuerdo con el número de usuarios de Internet, ¿cuántas personas utilizan la banca en línea? _____
- ¿A qué número de usuarios pretenden llegar los dueños de los bancos? _____
- Según lo anterior, ¿cuántos nuevos usuarios se espera que puedan realizar operaciones de banca en línea en tres meses? _____
 - ¿Y en seis meses? _____
 - ¿Y en nueve meses? _____
- Considerando únicamente el incremento estimado por los dueños de los bancos, ¿la estrategia propuesta representa una situación de proporcionalidad? _____
 - Si es el caso, ¿qué tipo de proporcionalidad representa? Justifica tu respuesta. _____
- ¿Qué expresión algebraica modela el incremento mensual de usuarios? _____
- Completa la tabla utilizando la expresión algebraica que modela la situación.

Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Incremento de usuarios									

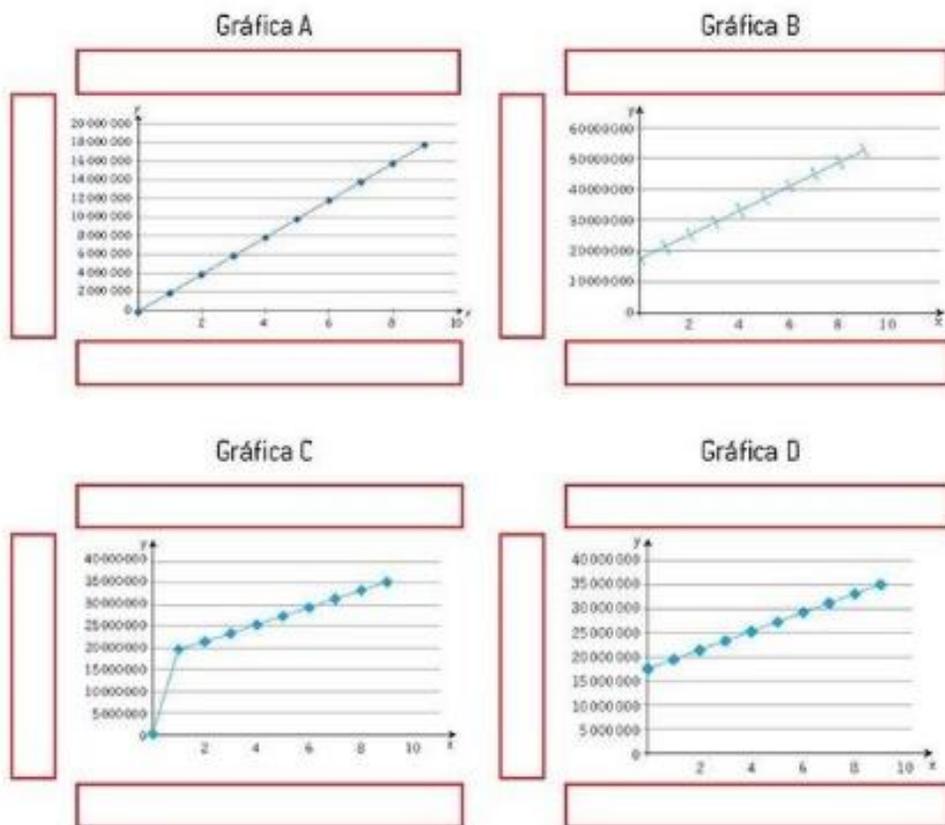
- ¿Cómo sería una gráfica que represente los datos de la tabla? _____

- Socializa tus respuestas con el grupo y discutan las características de una gráfica que represente situaciones de proporcionalidad. Después registren sus acuerdos.

Gráfica de los servicios de banca en línea

2. En pareja, lean la información de la página anterior y resuelvan.

- a. Determinen cuál de las gráficas representa la relación de usuarios con respecto del incremento mensual esperado. Argumenten su elección.



- b. Agreguen a la gráfica correcta el título y pongan nombre a los ejes horizontal y vertical. Justifiquen su decisión. _____

- c. Escriban tres características de una relación de proporcionalidad. _____

- d. Determinen si la gráfica elegida es de proporcionalidad y por qué las otras no corresponden a la situación planteada. Sustenten sus respuestas. _____

➤ Comparen sus respuestas en grupo y válidenlas con el profesor.

3. Analicen en equipo los problemas, realicen y justifiquen lo que se solicita.

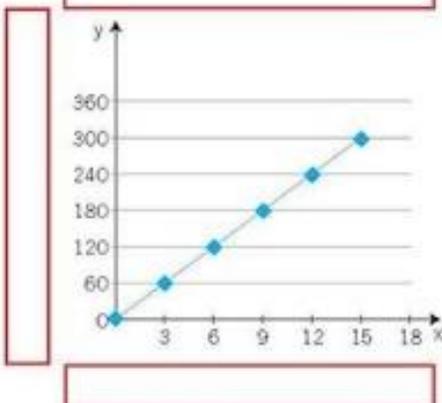
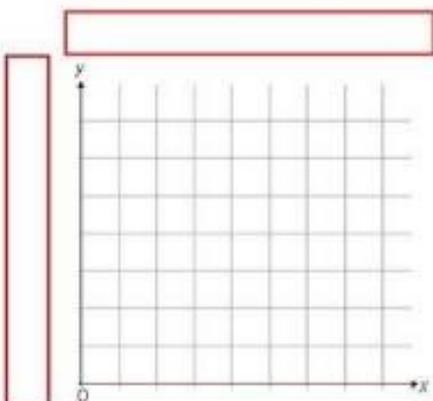
Un grupo de asesores financieros cobra 500 pesos por cada hora de trabajo. En el mes de octubre trabajaron cuatro proyectos. En el primero laboraron 16 horas; en el segundo, 12 horas; en el tercero, 48 horas, y en el cuarto, 96 horas.

- a. ¿Cuánto cobraron en cada proyecto? _____

- b. ¿Qué expresión algebraica modela el cobro, según las horas de trabajo? _____

c. Registren en la tabla el cobro de los asesores, según el tiempo de trabajo.

Horas	10	15	20	30	40	50	70	80	90	120	150
Cobro											



d. Con base en la expresión algebraica del inciso b o los datos de la tabla anterior, en el plano de la izquierda, elaboren la gráfica que modele la situación.

- ¿Qué datos se ubican en el eje horizontal? _____
- ¿Cuáles en el eje vertical? _____
- ¿Qué tipo de relación representa la situación? _____
- ¿Qué característica tiene la gráfica que trazaron? _____

e. La gráfica de la izquierda muestra el tiempo en minutos que emplea una fotocopidora en escanear las páginas de un documento.

- Completa la información que falta en la gráfica.
- Representa la información en la tabla. Incluye el número de páginas escaneadas en 1, 2, 4, 5, 7 y 8 minutos.

Minutos						
Páginas escaneadas						

➤ Socialicen sus respuestas con el grupo y discutan las características de las gráficas y de las tablas representadas. Registren en el cuaderno los acuerdos que resulten. Validen con su profesor.

4. En pareja, comparen las expresiones algebraicas y las gráficas de los problemas de la actividad 3 y respondan. Justifiquen sus respuestas.

- ¿Cómo son entre sí las expresiones algebraicas? _____
- Sin considerar la unidad utilizada en cada caso, ¿cómo son entre sí las relaciones numéricas que hay en ambas gráficas? _____
- Determinen si ambos casos representan una situación de proporcionalidad. Si es así, mencionen de qué tipo. Justifiquen con argumentos matemáticos. _____

➤ Socialicen sus respuestas con el grupo y discutan la relación entre la representación gráfica, tabular y algebraica de situaciones de proporcionalidad, como las estudiadas antes. Registren en el cuaderno sus conclusiones.

Cajas de cristal

5. En equipo, realicen lo que se indica y justifiquen sus respuestas.

Brenda fabrica cajas de cristal para flores de polietileno, como la de la imagen que se muestra a la derecha. Su forma es de prismas con base cuadrada de 100 cm^2 y altura variable. Algunas tienen un volumen de $1\,500$, $2\,000$, $2\,500$, $3\,000$, $4\,000$ y $4\,500 \text{ cm}^3$.

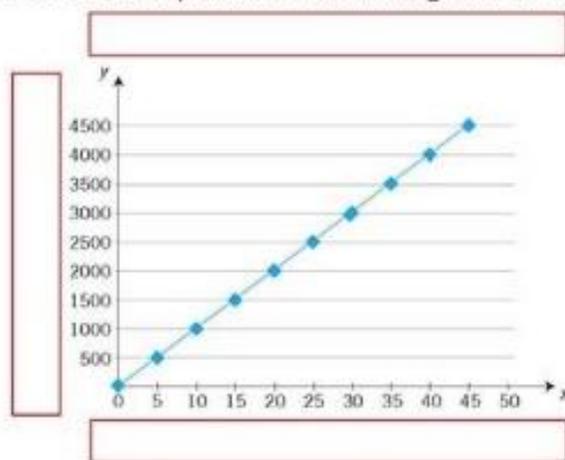


- a. Completen los datos faltantes en la tabla.

Volumen (cm^3)	1 500	2 000	2 500	3 000	4 000	4 500
Altura						

- Describan el procedimiento que siguieron para completar la tabla. _____

- b. La gráfica representa los datos del problema anterior. Asígnenle un título y nombren los ejes.



- Expliquen las características de la representación gráfica que modela el problema. _____

- c. La expresión algebraica $y = 100x$ modela el problema de las cajas de cristal.

- ¿Qué representa el 100? ¿Qué valores corresponden a x y cuáles a y ? _____

- d. Comparen la expresión algebraica, la tabla y la gráfica de los problemas del punto 3 con las respectivas del problema de Brenda.

- ¿Los tres problemas se pueden representar con tablas, gráficas y expresiones algebraicas? Justifiquen su respuesta. _____

- Expliquen qué tipo de proporcionalidad caracteriza los problemas estudiados. _____

- Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y determinen las características de las gráficas y expresiones algebraicas que modelan el tipo de relaciones de proporcionalidad trabajadas.

Distintas representaciones

6. En equipo, analicen y hagan lo que se pide.

En la siguiente actividad se presentan dos expresiones algebraicas, dos gráficas y dos tablas. Seleccionen, en cada caso, la que represente una situación de proporcionalidad directa, completen la oración y planteen un problema que se solucione con ella.

- a. Expresiones algebraicas: $y = 3x + 4$ $y = 4.5x$
- La expresión algebraica _____ representa una relación de proporcionalidad directa, debido a _____
 - Planteamiento: _____

b. Gráficas:



- La gráfica _____ representa una relación de proporcionalidad directa, debido a _____
- Planteamiento: _____

c. Tablas:

Tabla 1					
1	2	3	4	5	6
7	10	13	16	19	22

Tabla 2						
1	2	3	4	5	6	7
4.5	9	13.5	18	22.5	27	31.5

- La tabla _____ representa una relación de proporcionalidad directa, debido a _____
 - Planteamiento: _____
- d. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en cada representación? _____
- e. ¿El problema del inciso c se puede modelar con una gráfica o con una expresión algebraica? Justifiquen su respuesta. _____
- f. ¿Por qué las opciones no elegidas no representan una relación de proporcionalidad? _____
- g. ¿Todas las gráficas de proporcionalidad son lineales? Justifiquen su respuesta. _____

➤ Compartan sus resultados con el grupo y registren sus conclusiones.

Las máquinas de serigrafía

7. Analicen y respondan con argumentos lo que se solicita.

Una empresa de serigrafía tiene cinco máquinas para grabar logos en vasos, playeras y otros artículos. Se sabe que con tres máquinas produce 1 800 logos en tres días. La empresa necesita entregar 4 000 vasos para una graduación en tres días.

a. Si utiliza las cinco máquinas, considerando que todas tienen la misma capacidad de producción, ¿la empresa podrá cumplir la entrega? _____

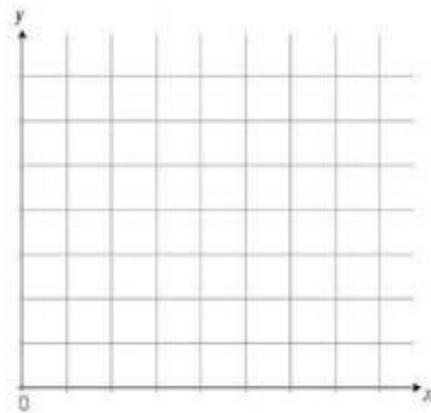
• ¿Cuántos vasos grabados puede producir en los tres días? _____

b. ¿La situación anterior es de proporcionalidad? _____

• Si la respuesta anterior fue sí, ¿de qué tipo de proporcionalidad se trata? _____

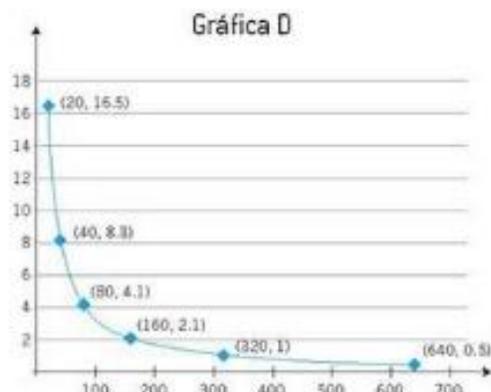
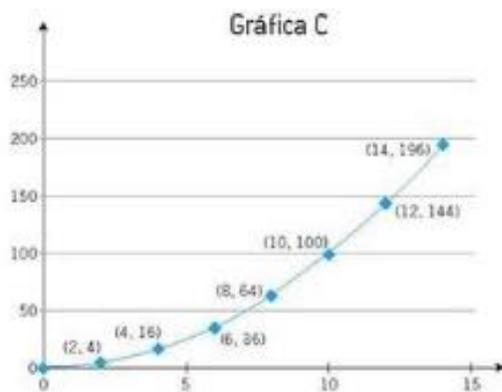
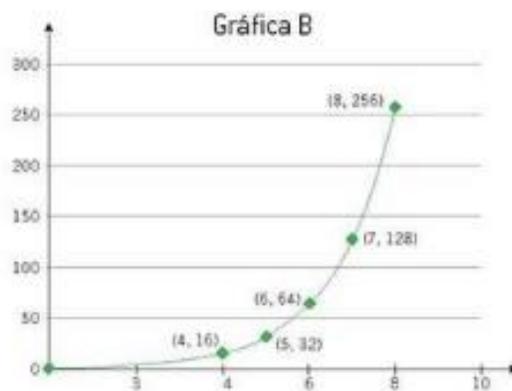
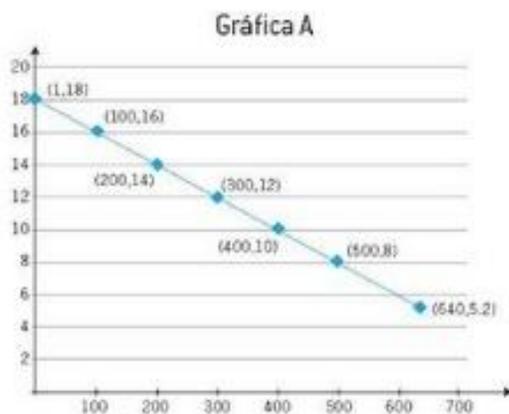
c. Tracen la gráfica que representa la situación en el plano de la derecha.

d. Registren la ecuación o expresión algebraica correspondiente: _____



En la empresa graficaron la relación entre el costo de producción por pieza, según el número de artículos grabados. Consideren que esto representa una relación de proporcionalidad.

e. Analicen y elijan la gráfica que modela dicha relación.



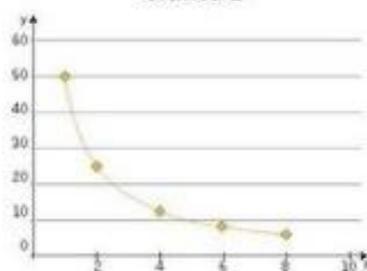
- ¿Qué tipo de proporcionalidad modela la gráfica seleccionada? _____
- f. Elaboren en su cuaderno una tabla de datos que muestre la información de la gráfica anterior.
- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela la situación de proporcionalidad establecida? _____
- g. Escriban en su cuaderno un problema que se pueda modelar con la gráfica, la tabla o la expresión algebraica anteriores.
- Expongan al grupo sus planteamientos y, con la guía del profesor, compartan sus respuestas. Después registren sus conclusiones.

Relación entre distintas representaciones

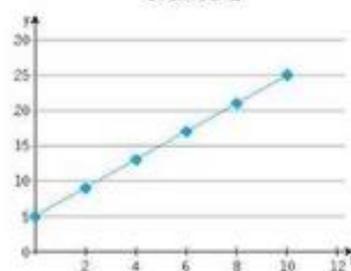
B. Analiza la información y contesta con argumentos matemáticos lo que se pide.

En seguida se muestran cuatro gráficas, dos expresiones algebraicas y dos tablas de datos, que representan distintas relaciones de proporcionalidad.

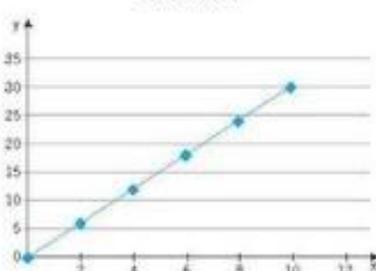
Gráfica 1



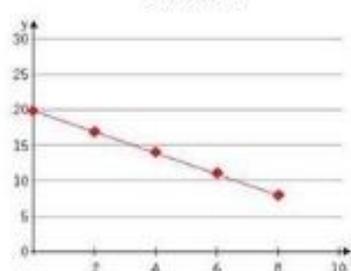
Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4



Expresión 1: $y = 3x$

Expresión 2: $y = 2x + 5$

Tabla 1

0	2	4	6	8
20	17	14	11	8

Tabla 2

1	2	4	6	8
50	25	12.50	8.33	6.25

- a. ¿Qué gráficas se relacionan con las expresiones algebraicas? _____
- b. ¿Cuáles gráficas se relacionan con las tablas? _____

- c. ¿Cuáles gráficas representan una relación lineal? Explica tu respuesta. _____
- d. ¿Cuáles son de proporcionalidad y de qué tipo? Justifica. _____
- e. ¿Cuáles gráficas, además de ser lineales, también son de proporcionalidad? ¿Por qué? _____
- f. Plantea en el cuaderno un problema que se pueda resolver con cada gráfica.

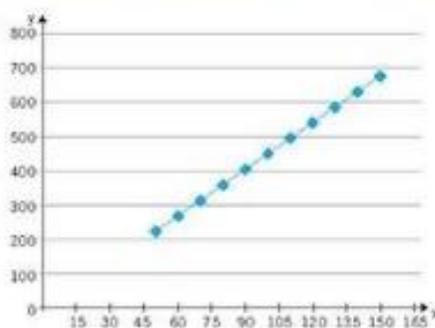
9. Realiza lo que se indica.

- a. Determina si la gráfica, la tabla y la expresión algebraica representan una misma relación de proporcionalidad. Explica de qué tipo de proporcionalidad se trata.

0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5
2.25	6.75	11.25	15.75	20.25	24.75	29.25	33.75	38.25	42.75	47.25

Expresión algebraica: $y = 4.5x$

- b. Escribe en el cuaderno un problema que se pueda modelar con la información que muestran las distintas representaciones.



- Comenten con el grupo sus resultados y propuestas. Con la ayuda del profesor, registren en el cuaderno los acuerdos acerca de las características de las distintas representaciones de relaciones de la forma $y = kx$.

Reto

Relaciones de la forma $y = kx$

1. En pareja, resuelvan los problemas.

- a. Representen por medio de una tabla de valores, y gráficamente, las siguientes expresiones algebraicas. Planteen en su cuaderno un problema para cada caso.

• $y = \frac{1}{2}x$

• $y = 1\,200x$

• $y = 0.5x$

- b. Definan las características de cada representación para una relación de proporcionalidad.

- Tabla de datos: _____
- Gráfica: _____
- Algebraica: _____

- Discutan en grupo sus experiencias. Registren las dificultades o dudas que encontraron y socialicenlas para aclararlas en grupo.

Apoyo tecnológico

En este sitio de Internet podrás ampliar la información sobre el tema estudiado:

www.educ.ar/dinamico/UnidadHtml_get_ff09e8f7-7a0a-11e1-82be-ed15e3c494af/index.html

Al ingresar a la página aparecen dos opciones: una para descargar el sitio y poder navegar sin conexión a Internet y otra para hacerlo en línea. Si tomas la primera, en el sector izquierdo de la pantalla se puede descargar cualquiera de las unidades. Una vez hecho esto, es necesario bajar el *applet* para que puedas ver las aplicaciones en las diferentes páginas, lo que se consigue en la sección de descarga del sitio Descartes. Podrán verse los sitios con sus respectivas actividades en el navegador que se posea, como si se estuviese en línea. Discute con tus compañeros la información que se encuentra en la página y analicen juntos los ejemplos propuestos. Si hay dudas, pidan apoyo al profesor. [consulta: 14 de noviembre de 2013]

Relaciones de variación cuadrática

Eje: Manejo de la información

Tema: Proporcionalidad y funciones

Contenido: Representación tabular y algebraica de relaciones de variación cuadrática, identificadas en diferentes situaciones y fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas

Tiempo [s]	Altura [cm]
0.00	0.0
0.25	4.7
0.50	8.8
0.75	12.2
1.00	15.0
1.25	17.2
1.50	18.8
1.75	19.7
2.00	20.0
2.25	19.7
2.50	18.8
2.75	17.2
3.00	15.0
3.25	12.2
3.50	8.8
3.75	4.7
4.00	0.0

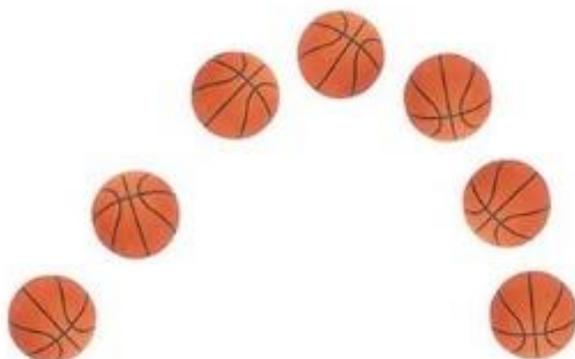
Los efectos de la ley de gravedad

1. Lee la información y resuelve.

Mónica y Paulina realizan un experimento que consiste en lanzar un balón para analizar cómo influye la ley de gravedad (la cual dice que un objeto atrae a los demás con una fuerza que es directamente proporcional a las masas) en el cambio de altura. Con la ayuda del profesor de Física, Paulina registró los tiempos del rebote mientras Mónica lanzaba el balón. Los resultados se muestran en la tabla de la izquierda.

- ¿Cómo cambia la altura del balón en el intervalo de 0 a 2 segundos? _____
- ¿Cuál es la diferencia de altura entre 0.25 y 0.50 s? _____
- ¿En qué tiempo el balón alcanza la mayor altura? _____
- ¿Qué relación hay entre el tiempo que el balón alcanza su máxima altura y el tiempo que tarda en regresar a 0 cm? _____
- ¿Qué sucede con la altura del balón en los segundos 2 a 4? _____
- En los intervalos de tiempo que has analizado, ¿la altura que se recorre en cada uno es la misma? Argumenta tu respuesta. _____
- ¿Qué patrón identificas entre los datos de la tabla? Explicalo. _____

La imagen de la izquierda muestra el movimiento que siguió el balón al rebotar contra el suelo.



- ¿Cómo se puede describir la manera como el balón aumenta su altura en cada lapso de tiempo? _____
 - Investiga el nombre del movimiento que muestra la trayectoria del balón.
 - ¿Existirá alguna relación entre el movimiento que sigue el balón y la gráfica que lo represente? _____
- Socializa tus respuestas. En equipo, reflexiona cómo sería una gráfica que muestre el movimiento del balón, a partir de los datos de la tabla.

Representación algebraica

2. En equipo, resuelvan las actividades a partir del problema de Mónica y Paulina.
- ¿Los datos de la tabla de la página anterior representan una relación de proporcionalidad? Argumenten su respuesta. _____
 - ¿Representa una relación lineal? Justifiquen. _____

 - Analicen estas expresiones algebraicas y observen los valores de la tabla.
 - $h = 5t^2$ • $h = 5t^2 - 20t$ • $h = 20t$ • $h = -5t^2 + 20t$
 - ¿Cuál de las expresiones modela la situación? Argumenten su respuesta. _____

 - Determinen cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente de la expresión algebraica y qué representa cada una. _____

 - Con base en lo comprobado, y lo visto en la lección 1, expliquen por qué los datos del lanzamiento del balón representan una relación de variación cuadrática. _____

 - Si lo consideran pertinente, amplíen la información sobre una relación de variación cuadrática en un medio electrónico o impreso.
- Socialicen sus respuestas y lleguen a acuerdos. Después analicen en grupo la siguiente información.

La expresión algebraica o ecuación de la actividad anterior es un caso particular del fenómeno que se conoce como *caída libre*, para determinar la altura desde la que cae un objeto. Dicha expresión es $h = \left(\frac{1}{2}\right)gt^2 + v_0t$, donde g es la fuerza de gravedad y tiene un valor de 9.8 m/s^2 (en el ejemplo del balón de basketbol se redondeó a 10 m/s^2); t es el tiempo y se mide en segundos; v_0 es la velocidad inicial y se mide en m/s . Con base en lo anterior, utilizamos la expresión $h = -5t^2 + v_0t$. Consideren que cuando un objeto se lanza hacia arriba, g se representa con signo negativo.

- Utilicen esta información para complementar sus acuerdos. Revisen las respuestas de la página anterior y, si es necesario, corrijanlas con el apoyo de su profesor.
3. Lean la información, completen la tabla y respondan las preguntas de la siguiente página.
- En una prueba de despegue de un cohete, se sabe que $v_0 = 180 \text{ m/s}$. Completen la tabla, usando la expresión algebraica de la caída libre.

Tiempo (segundos)	3	8	17	18	19
Altura (m)					

- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el cohete? _____
- ¿Cuántos segundos transcurren desde que se lanza hasta que cae al piso? _____
- Anoten la ecuación que modela el problema. _____

b. En otra prueba, en el cohete lanzado se modifica la velocidad inicial a $v_0 = 200$ m/s.

- Construyan una tabla que muestre la relación entre el tiempo y la altura.

Tiempo (segundos)									
Altura (m)									

- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el cohete? _____
- ¿En cuánto tiempo llegará nuevamente al suelo? _____
- ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente? _____

➤ Socialicen sus respuestas y lleguen a acuerdos en función de las características de un registro tabular y de la ecuación que representa una función cuadrática.

Problemas cuadráticos

4. Analicen los planteamientos y resuelvan.



Chapulín proviene del náhuatl *chapōlin*, de *chapōl(nia)*, rebotar, y *ōlli*, hule, por eso significa "insecto que brinca como pelota de hule".

a. Miriam es zoóloga y está caracterizando al chapulín (*Tettigonia viridissima*). En sus estudios determinó que la expresión algebraica que representa la relación entre la altura del brinco de este insecto y el tiempo se puede expresar como: $h = -5t^2 + 8t$.

- ¿Qué representan las literales h y t en la expresión algebraica? _____
- Consideren la expresión algebraica y completen los datos de la tabla.

Tiempo (segundos)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6
Altura (m)									

- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el chapulín? _____
- ¿En qué tiempo logra la altura máxima? _____
- ¿Cuánto tiempo dura su salto? _____

b. Alfonsina es pintora y vende sus cuadros. Ella piensa incrementar sus ganancias aumentando el precio de los cuadros. Para estimar sus ingresos, Alfonsina consideró la expresión algebraica $G = p(110 - p)$, en la cual G representa sus ganancias si cobra p pesos por cada pintura. Sin embargo, corre el riesgo de que, si aumenta demasiado el precio, sus ganancias disminuyan.

- ¿Cuál es la variable dependiente en esta expresión algebraica? _____
- ¿Cuál es la variable independiente? _____

- Completen el siguiente registro tabular. Consideren cantidades a partir de \$10 con incrementos de la misma cantidad.

Incremento										
Ganancia mensual										

- ¿Cuál es el precio que le dará a Alfonsina la ganancia máxima? _____
 - ¿Cuál es el patrón que se observa en los datos del registro tabular? _____
- _____
- Expliquen por qué los dos planteamientos anteriores corresponden a una función cuadrática. _____

- c. A Osiris le dejaron de tarea escribir una expresión algebraica que modele la multiplicación de un número natural por su consecutivo; para ello le pidieron verificar dicha expresión con los datos de la siguiente tabla.

Número	Producto del número por su consecutivo
10	110
15	240
20	420
25	650
30	930
35	1 260
40	1 640
45	2 070
50	2 550
55	3 080
60	3 660

- Escriban una literal con la cual se pueda determinar cualquier número natural. _____
 - Con base en la literal escrita, ¿cuál es la expresión que determina el número consecutivo? _____
 - ¿Qué expresión representa el producto de los números anteriores? _____
 - ¿Es posible que el producto sea una expresión cuadrática? ¿Por qué? _____
- _____
- Dada la expresión anterior, verifiquen que la relación de la tabla sea correcta.

- Socialicen sus respuestas y comparen sus procedimientos con otros compañeros. Si existen dudas o diferencias, válídenlas con el profesor. Registren en el cuaderno sus acuerdos y conclusiones acerca de lo trabajado.

Funciones cuadráticas en áreas y perímetros

5. En pareja, resuelvan lo siguiente.

El perímetro del rectángulo que se muestra mide 20 cm y uno de los lados tiene una longitud k cm.



- Escriban una expresión que represente la medida del otro lado del rectángulo en función del perímetro y de k . _____
 - En este caso, ¿qué significa k ? _____
 - ¿Cuántos valores puede tener k ? ¿El valor de k puede ser cero? Justifiquen sus respuestas. _____
 - ¿Se puede afirmar que k representa una variable? Argumenten. _____
- Determinen una expresión algebraica para obtener el área del rectángulo en función de la medida del perímetro y del lado k . Anótenla dentro de la figura.
 - ¿La expresión algebraica anterior es una ecuación cuadrática? ¿Por qué? _____
 - En la ecuación establecida, ¿cuál es la variable independiente y cuál la dependiente? _____
- Si la longitud del lado k es de 8 cm, ¿cuál es la medida de su área? _____
- Usen la expresión algebraica que modela el problema para completar la tabla.

Longitud de k (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Longitud del lado, en función de k y del perímetro									
Área (cm ²)									

- Conforme aumenta la longitud del lado k , ¿qué sucede con la medida escrita en función de k y del perímetro? _____
- ¿Qué sucede cuando el lado k mide 10 cm o más? _____
- Consideren el uso de números decimales hasta décimos. ¿Cuál es el mínimo y el máximo valor que puede adquirir k ? _____
- ¿Cuál es la mayor área posible de un rectángulo con ese perímetro? _____
- ¿Qué patrones identifican entre los datos de la tabla? Explíqueno. _____

- e. El rectángulo de la derecha tiene un perímetro de 110 m y un lado de longitud g cm.
- Determinen la expresión algebraica que permite obtener su área en términos de g . _____
 - ¿Cuál es la mayor área posible de un rectángulo con ese perímetro? _____



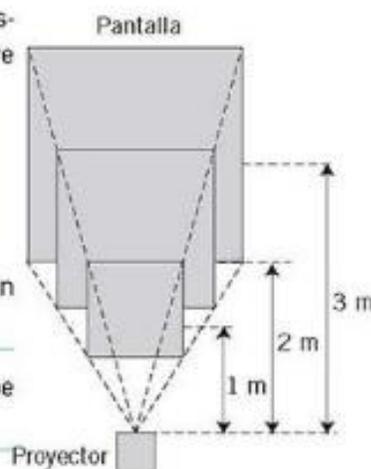
➤ Socialicen sus respuestas y discutan qué tipo de relación o función se establece entre los datos de los problemas propuestos. Escriban en el cuaderno sus conclusiones.

6. Analiza la información y resuelve.

Rolando es biólogo marino y en una presentación usó un proyector de diapositivas para mostrar organismos unicelulares. La medida del área de la pantalla depende de la distancia entre el proyector y la misma, como se ilustra en la imagen de la derecha.

Distancia entre el proyector y la pantalla (m)	1	2	3
Área de la imagen en m^2	4	16	36

- Determina la expresión algebraica que modela la relación entre la distancia y el área en cada uno de los momentos de la proyección de las diapositivas. _____
- Aplica la expresión algebraica que construiste y determina a qué distancia se debe colocar el proyector, de manera que el área de la imagen sea de $25 m^2$. _____
- Registra los datos faltantes en la tabla.



Distancia entre el proyector y la pantalla (m)	1.25	2.25	3.25	4.25
Área de la imagen en m^2				

- Determina al menos tres características de una función cuadrática.
 - _____
 - _____
 - _____

➤ Socializa tus respuestas con el grupo y discute las características de una gráfica que represente una relación cuadrática como las estudiadas. Después registra los acuerdos que concluyan.

Reto Modelación matemática

1. En pareja, planteen un problema que se represente con cada una de estas expresiones algebraicas y elaboren la tabla de datos correspondiente.

a. $A = x^2 - 6x$

b. $H = -16t^2 + 8t$

c. $A = (18 + l)l$

➤ Comparen su trabajo en clase. Registren las dificultades o dudas que enfrentaron y extérnenlas para aclararlas con ayuda del grupo y del profesor.

Apoyo tecnológico

En este sitio podrás evaluar qué tanto aprendiste del tema estudiado. Analiza los ejercicios propuestos y contesta la autoevaluación 1 y 2.

www.dav.sce.utn.frba.utn.edu.ar/homovidens/lloret/aplicaciones.htm

Comparte tus experiencias en clase. Si tienes dudas, pide apoyo al profesor.

[consulta: 14 de noviembre de 2013]

Complementarios, mutuamente excluyentes e independientes

Eje: Manejo de la información
Tema: Nociones de probabilidad

Contenido: Conocimiento de la escala de la probabilidad. Análisis de las características de eventos complementarios y eventos mutuamente excluyentes e independientes

Impacto del asteroide *Apophis* contra la Tierra

1. Lee la información y resuelve lo que se solicita.



El asteroide *Apophis* tiene un periodo orbital de 323 días, y en su trayectoria atraviesa la órbita de la Tierra dos veces en cada vuelta al Sol.

Científicos reducen la probabilidad de impacto del asteroide *Apophis* contra la Tierra en 2036.

Cálculos realizados con base en nuevas técnicas y datos actualizados demuestran que la probabilidad de choque del asteroide *Apophis* con la Tierra en 2036 es cinco veces menor que la que se estimaba antes, afirmaron Steve Chesley y Paul Chodas, científicos del *Jet Propulsion Laboratory* de la Agencia Aeroespacial Norteamericana (NASA).

Las últimas observaciones permitieron establecer que en 2068 el asteroide se aproximará a la Tierra con tres posibilidades en un millón de hacer impacto en nuestro planeta.

Fuente: www.tecnologiahechapalabra.com/ciencia/miscelanea/articulo.asp?i=4137
[Consulta: 20 de octubre de 2012. 04:04 p.m.]

- ¿Entre qué números es posible representar la probabilidad de que se impacte el asteroide *Apophis* contra la Tierra? Justifica tu respuesta. _____
- En este caso, ¿qué significa la medida numérica asociada al impacto del asteroide con la Tierra? _____
- ¿Qué formas numéricas permiten representar la probabilidad de que ocurra un evento? Escríbelas usando el fenómeno descrito. _____
- ¿Cómo son entre sí las diferentes representaciones numéricas de la probabilidad de un evento? _____
- Explica por qué la medida de la probabilidad puede ser representada por una razón entre los eventos favorables y el total de eventos posibles. _____

En otra investigación realizada con el apoyo de satélites militares, pudieron calcular que la probabilidad de que un asteroide impacte contra la Tierra es de uno por cada 1 000 años. La investigación ha analizado 300 impactos de pequeños meteoritos ocurridos en la atmósfera desde 1994.

Fuente: www.tendencias21.net/Una-nueva-investigacion-eleva-a-1-000-anos-la-probabilidad-de-choque-con-un-gran-asteroide_a58.html [Consulta: 20 de octubre de 2012. 04:22 p.m.]

- f. Obtén la probabilidad de que choque un asteroide contra la Tierra. _____
- g. Compara la probabilidad anterior con la probabilidad de que el asteroide *Apophis* colisione contra la Tierra. ¿Qué evento es más probable que ocurra? Justifica tu respuesta. _____
- h. Reflexiona sobre cómo podrías representar la probabilidad de que ocurran dos eventos distintos para poder compararlos.

➤ Analicen en grupo sus respuestas y argumentos. Comenten lo que saben o lo que creen que significa la escala de la probabilidad de un evento y cómo se representa. Elaboren conclusiones y registren sus acuerdos.

Escala de probabilidad

2. Resuelvan en pareja lo siguiente.

Joshua realizará un experimento que consiste en extraer tres cartas iguales de una bolsa oscura y predecir si saldrá la cara delantera (D) o la posterior (P). Para ello, toma una carta de la bolsa y, sin verla, la coloca sobre una mesa cubriéndola con la palma de la mano; después observa la cara obtenida. Esto lo realiza tres veces, sin regresar las cartas a la bolsa.

- a. ¿Cuáles son los resultados posibles que obtendrá Joshua al realizar el experimento con las tres cartas? Expliquen su respuesta. _____
- b. ¿Qué hicieron para tener la respuesta? _____
- c. Completen en el cuaderno una tabla como la que se muestra para determinar el **espacio muestral** del experimento anterior.

Carta 1	Carta 2	Carta 3	Resultado del experimento
D	D	D	DDD
D	D	P	DDP

- Contrasten los resultados de la tabla con los que respondieron en el inciso a. ¿Son los mismos? _____
- ¿Qué evento tiene mayor probabilidad de ocurrir? _____
- ¿Cuál tiene menos probabilidad de ocurrir? _____
- ¿Cómo explicarían a una persona la forma de determinar y representar el espacio muestral del experimento anterior? _____

➤ Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. En grupo, realicen los ajustes necesarios a su explicación y registren en el cuaderno sus conclusiones.



La baraja inglesa es un conjunto formado por 52 naipes o cartas.

Glosario

espacio muestral.

Es el conjunto de todos los resultados o eventos posibles de un experimento aleatorio. Se denota con la letra *S*.

3. Sigam trabajando en pareja para hacer lo que se indica.

- a. Determinen la probabilidad de que ocurran los eventos de la tabla, de acuerdo con el experimento anterior, y completen los espacios.

Probabilidad del evento	Fracción común	Expresión decimal	Porcentaje
Ninguna cara posterior			
Ninguna cara delantera			
Tres caras posteriores			
Tres caras delanteras			
Dos caras delanteras			
Dos caras posteriores			
Dos caras amarillas			

- De los eventos anteriores, ¿cuál tiene mayor probabilidad de ocurrir? _____
 - ¿Cuáles tienen la misma probabilidad de ocurrencia? _____
 - ¿Alguno de ellos es un evento imposible? Justifiquen su respuesta. _____
-
- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una sola carta, la cara sea posterior o delantera? Argumenten su respuesta. _____

- b. Ubiquen en la recta numérica la probabilidad de cada evento de la tabla. Después, respondan en su cuaderno.



- ¿Qué escala utilizaron? ¿Entre qué números se puede definir la probabilidad de que ocurra un evento? Expliquen su respuesta.
- ¿Qué significa que la ocurrencia de un suceso sea cero?
- ¿Qué sucede si la probabilidad de ocurrencia es 1?
- ¿Es posible que la probabilidad de un suceso aleatorio sea mayor que 1 o menor que cero? Argumenten su respuesta.

- c. Escriban en su cuaderno tres eventos de ocurrencia segura y tres imposibles. Justifiquen su registro.

- d. Reflexionen lo siguiente y respondan en su cuaderno.

- ¿Es posible que, al realizar el experimento, el resultado de una carta sea cara delantera y cara posterior al mismo tiempo? Expliquen su respuesta.
- ¿Por qué en un experimento aleatorio dos o más eventos posibles no pueden ocurrir al mismo tiempo?

- › Socialicen sus resultados. Si hay dudas, coméntenlas en grupo para solucionarlas, con ayuda del profesor. Validen sus acuerdos con la siguiente información.

Cuando se realiza un experimento aleatorio, la medida de ocurrencia de un suceso A se llama **probabilidad** de A y se representa como $P(A)$. La probabilidad de que ocurra un evento es igual al cociente del número de eventos favorables entre el total de eventos posibles. Por ello, la escala de medida de un suceso siempre está comprendida entre 0 y 1.

Es un **evento seguro** el que está formado por todos los posibles resultados, es decir, por el espacio muestral. Obtener sol o águila al lanzar una moneda es un suceso seguro. Un **evento imposible** es aquel que no tiene ningún elemento dentro del espacio muestral. Tirar un dado y obtener 7 es un evento imposible.

Complementarios y mutuamente excluyentes

4. Resuelvan en equipo las siguientes actividades.

a. Determinen el espacio muestral de lanzar un dado y una moneda al mismo tiempo.

• $S = \{ \text{_____} \}$

b. Considerando el espacio muestral, escriban los datos faltantes en la tabla.



Evento o suceso	Resultados posibles del evento	Probabilidad
A: Cae un número par y sol.	$A = \{(2, S), (4, S), (6, S)\}$	$P(A) = \frac{3}{12}$
	$B = \{(2, A), (4, A), (6, A)\}$	
C: Cae un número mayor que 3 y águila.		
D: Cae número impar y sol.		
	$E = \{(1, A), (2, A), (3, A)\}$	
	$F = \{(4, S), (5, S), (6, S)\}$	

• Comparen los eventos A y F ; ¿tienen elementos en común? ¿Qué los hace diferentes?

• ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra A o F ? Expliquen su respuesta. _____

• ¿Pueden darse al mismo tiempo los eventos F y E ? ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra uno u otro? Justifiquen sus respuestas. _____

c. Si se tienen los eventos: $H = \{(1, S), (2, S), (3, S)\}$ y $G = \{(4, A), (5, A), (6, A)\}$, ¿pueden darse al mismo tiempo ambos? Expliquen su respuesta.

• ¿Qué significado pueden asociar al hecho de que dos eventos tengan elementos comunes? ¿Y al hecho de que dos eventos no tengan elementos comunes?

➤ Socialicen sus conclusiones con el grupo. Investiguen y comenten lo que entienden por eventos mutuamente excluyentes y registren sus acuerdos.

5. Analicen las situaciones y resuélvanlas en pareja.

a. Determinen la probabilidad de los eventos J y K.

$$J = \{(1, S), (2, S), (3, S), (4, S), (5, S), (6, S)\}$$

$$K = \{(1, A), (2, A), (3, A), (4, A), (5, A), (6, A)\}$$

• $P(J)$: _____ • $P(K)$: _____

• ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento J o K? _____

b. Consideren los eventos A, B y C, al lanzar un dado, y determinen su probabilidad.

$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{3, 4\}$$

$$C = \{5, 6\}$$

• $P(A)$: _____ • $P(B)$: _____ • $P(C)$: _____

• ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra el evento A, el B o el C? _____

➤ Socialicen sus argumentos. Una vez establecidas sus conclusiones, discutan la siguiente información para complementarlas.

Dos eventos son **mutuamente excluyentes** cuando no pueden ocurrir en forma simultánea. Por ejemplo, cuando al lanzar un dado y una moneda: el evento $E = \{(1, A), (2, A), (3, A)\}$ no puede ocurrir al mismo tiempo que el evento $F = \{(4, S), (5, S), (6, S)\}$ y viceversa. Cuando dos eventos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de uno u otro es igual a la suma de ambos. Cuando dos eventos no son mutuamente excluyentes, para calcular la probabilidad de que suceda uno u otro se suman las probabilidades y al resultado se le resta la probabilidad del evento común; por ejemplo, como ocurrió en la tabla de la página anterior:

Dos eventos o más se denominan **complementarios** cuando su unión da el espacio muestral y la suma de sus probabilidades es 1.

c. Retomen los datos de la tabla de la página anterior y determinen cuáles son mutuamente excluyentes, cuáles no, y calculen la probabilidad en cada caso.

• $P(B \text{ o } C) =$ _____ • $P(D \text{ o } E) =$ _____

• $P(A \text{ o } E) =$ _____ • $P(B \text{ o } F) =$ _____

d. Ahora escriban cuatro experimentos que dependan de la probabilidad. En cada caso debe haber un ejemplo de eventos mutuamente excluyentes y uno de eventos complementarios. Si es necesario, construyan la tabla en su cuaderno.

Experimento	Espacio muestral	Eventos mutuamente excluyentes	Eventos complementarios

➤ Socialicen en clase sus propuestas. Sustenten con argumentos cada caso. Si hay dudas, coméntenlas con el profesor y lleguen a un consenso de grupo.

Eventos independientes

6. Lee la información y resuelve en tu cuaderno.

a. En un juego, se lanzan cuatro volados consecutivos y en todos ellos cae sol.

- ¿Cuál es la probabilidad de que en el quinto volado también caiga sol? Argumenta.
- ¿Los resultados de los cuatro primeros eventos afectan el resultado del quinto? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuál es el espacio muestral de cada volado?
- ¿La probabilidad de ocurrencia de un evento influye en la probabilidad de que suceda nuevamente al repetir el experimento n veces? Argumenta.

b. En una urna se tienen cinco fichas: una verde, una amarilla, una azul, una negra y una roja. Sin ver se saca una ficha...

- si se extrae la ficha negra y no se regresa a la urna, ¿cuál es la probabilidad de sacar la ficha verde en la segunda extracción? Explica tu respuesta. ¿Este resultado se ve afectado por la primera extracción? ¿Por qué?
- si se extrae la ficha negra y se regresa a la urna y en la segunda extracción sale la ficha azul y se regresa, y en una tercera nuevamente sale la negra, ¿qué probabilidad hay de sacar la ficha amarilla en una cuarta extracción?
- ¿Esta probabilidad se ve afectada por los resultados anteriores? Justifica.

➤ Socializa en grupo tus argumentos y compáralos con la siguiente definición.

Son **eventos independientes** cuando la probabilidad de ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia de otro. En el caso de la urna, el hecho de extraer y regresar una ficha no afecta el resultado de la siguiente toma; la probabilidad de cada evento sigue siendo la misma.

➤ En grupo, registren en el cuaderno sus conclusiones y validenlas con el profesor.

Reto Tres tipos de eventos aleatorios

1. En pareja, señalen en cada caso qué tipo de eventos corresponden y por qué.

a. Experimento: Lanzamiento de un dado y dos monedas

- Evento B = {2, sol, sol}
- Evento C = {4, águila, águila}

• Los eventos: _____ porque _____

b. Experimento: Lanzamiento de tres monedas:

- Evento B = {S, S, S}
- Evento C = {S, A, A}

• Los eventos: _____ porque _____

2. Planteen un problema en el que se tenga que identificar la escala de probabilidad de un suceso aleatorio; tal como se estudió con el impacto del asteroide *Aphopis* contra la Tierra.

➤ Discutan en grupo sus experiencias. Registren las dificultades o dudas que encontraron y pidan ayuda de su profesor para aclararlas.



Volado, juego de azar que consiste en predecir qué lado de una moneda caerá cara arriba.

Apoyo tecnológico

En este sitio podrás aplicar lo estudiado al interactuar con el recurso:

www.telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/interactivos/2_segundo/2_Matematicas/2m_b04_t04_s01_descartes/TS_2_index_05_04.html

En la página siguiente, revisa los conceptos que se enuncian y realiza las actividades. Analiza los ejemplos para saber resolver los ejercicios.

www.amschool.edu.sv/paes/e6.htm

Comparte tus experiencias en clase y, si hay dudas, pide apoyo al profesor.

[consulta: 14 de noviembre de 2013]

Diseño y análisis de una encuesta

Eje: Manejo de la información

Tema: Análisis y representación de datos

Contenido: Diseño de una encuesta o un experimento e identificación de la población en estudio. Discusión sobre las formas de elegir el muestreo. Obtención de datos de una muestra y búsqueda de herramientas convenientes para su presentación

La Profeco y la importancia de las encuestas

- En equipo lean la información y respondan las preguntas en su cuaderno.
 - México es el segundo país de Latinoamérica que cuenta con una Ley Federal de Protección al Consumidor y el primero en crear una procuraduría del consumidor: la Profeco. Una de las funciones de la Profeco es difundir, para conocimiento de los consumidores, los resultados de encuestas y sondeos que realiza sobre diferentes productos.
 - ¿Qué tipo de encuestas piensan que aplica la Profeco?
 - ¿A qué tipo de público o personas consideran que encuesta la Profeco?
 - ¿Han participado o han sido encuestados? Si es así, describan su experiencia; en caso de que no, comenten en qué tipos de encuesta les gustaría participar.
 - ¿Cuál es la utilidad de realizar encuestas y sondeos?
 - México cuenta con una gran variedad de productos. Por eso, ante tantas opciones, algunas personas buscan información en encuestas para elegir qué comprar. Por ejemplo, en 2012, la Profeco realizó una encuesta sobre hábitos de renovación tecnológica con respecto de la telefonía celular.
 - ¿Quiénes pueden tener interés en los resultados de este estudio?
 - ¿Qué tipo de preguntas creen que se plantearon? Propongan algunas.
 - ¿Cuántas personas sería necesario encuestar para tener información suficiente y darla a conocer? Expliquen su respuestas.
- Comenten en grupo acerca del tipo de encuesta que podrían realizar en la escuela y sus características. Regístren sus acuerdos en su cuaderno.
- Reúnete con un compañero, analicen la información de la tabla y la de la siguiente página y resuelvan.

En la tabla se enlistan algunos criterios que consideraron en la encuesta de la Profeco.

Objetivo	Identificar los hábitos de renovación y compra de nuevas tecnologías para teléfonos celulares.
Población objetivo	Personas mayores de 18 años que viven en el Distrito Federal y que hayan comprado en el periodo de referencia al menos un teléfono celular.
Periodo de referencia	Del 18 al 28 de enero de 2012
Datos de la muestra	Se aplicó un cuestionario estructurado de 144 preguntas a 663 personas en 17 puntos de afluencia en 13 de las 16 delegaciones políticas del Distrito Federal. Los puntos, como los entrevistados, fueron seleccionados aleatoriamente . Los resultados reportan 95% de confianza y 4% de error.

Fuente: www.Profeco.gob.mx/encuesta/mirador/2012/E_renov_tec_telefonia.pdf (consulta: 10 de abril de 2013)

Glosario

aleatorio.

Se dice que un evento es aleatorio cuando no es posible predecir o anticipar su comportamiento.

Un **cuestionario estructurado** es una lista de preguntas elaboradas previamente, las cuales siguen un orden que no se altera. Un cuestionario **semiestructurado** se basa en una lista de preguntas elaboradas, pero con la diferencia de que se pueden cambiar o reestructurar.

a. Analicen y discutan qué características se consideraron en la encuesta de la Profeco y respondan.

- ¿Por qué es necesario que una encuesta tenga un objetivo? _____

- Por el tipo de encuesta, ¿importa el género de los encuestados? ¿Por qué? _____

- ¿Qué ventajas o desventajas puede tener un cuestionario estructurado en comparación con uno semiestructurado? _____

- ¿Por qué no se consideró encuestar a menores de 18 años? _____
- ¿Por qué se usa el título de "Población objetivo"? _____

- Reflexionen: ¿por qué se considera un periodo para aplicar la encuesta? ¿Qué sucede si no se cuenta con él?

b. Lean la información de la columna "Datos de la muestra" y contesten en su cuaderno.

- ¿Por qué piensan que eligieron puntos de afluencia aleatoriamente? Expliquen.
- Reflexionen: ¿qué sucedería con los resultados si la población objetivo fuera de otra entidad, cambiarían los resultados? ¿Por qué?
- ¿Cuál es la relación que puede establecerse entre "población" y "muestra"?
- ¿Qué significa tener 95% de confianza y 4% de error?

c. En seguida se muestran algunos de los resultados de la encuesta anterior. Con base en estos, respondan en su cuaderno

- La mayoría (63%) de los encuestados contestó que compró teléfonos celulares; el que más adquirieron fue el aparato convencional.
- La razón principal por la que compraron un teléfono celular la última vez fue por renovar tecnología.
- Antes de realizar su compra solicitaron información con el vendedor.
- Con el teléfono celular realizan principalmente dos actividades: efectuar llamadas y enviar mensajes.
- ¿Qué preguntas creen que hicieron para obtener las respuestas anteriores? Propongan una para cada resultado.
- Si fueran encuestados, ¿qué tipo de preguntas les gustaría responder?
- ¿Usarían los datos de la encuesta para comprar un teléfono celular? Argumenten.
- Si aplicaran una encuesta, ¿cómo organizarían la información obtenida para darla a conocer? ¿Qué información matemática usarían en su estudio?

d. Escriban los elementos por considerar en el diseño de una encuesta y las condiciones que se requieren para llevarla a cabo.

➤ Socialicen sus respuestas. Analicen si en una encuesta es importante contemplar la calidad del producto, en este caso, del celular; su precio, el modelo, entre otros. Registren sus conclusiones.

Renovación tecnológica en equipos de cómputo

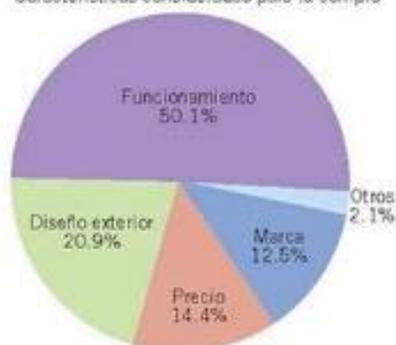
3. En equipo lean la información y respondan. Resuelvan en el cuaderno.

a. Los datos que se muestran son resultados de una encuesta sobre la renovación de equipos de cómputo.

- El 50.5% de los entrevistados dijo que compró algún equipo de cómputo.
- La característica más importante tomada en cuenta al comprar el equipo de cómputo fue su funcionamiento.
- Los entrevistados mencionaron que sí compararon las características de otras marcas y modelos en diferentes tiendas, como los precios, antes de comprar.
- Las formas de pago para este artículo fueron en orden de importancia: de contado y a meses sin intereses con tarjeta bancaria o de tienda comercial.
- Los principales puntos de compra de los equipos de cómputo fueron tiendas de autoservicio y departamentales.
- Con los equipos de cómputo realizan principalmente dos actividades: usar paquetería para realizar tareas y trabajos y navegar por Internet.
- ¿Qué herramienta matemática es conveniente utilizar para representar los datos del primer aspecto que se menciona? Expliquen por qué.
- ¿Qué preguntas se pueden plantear con los resultados mostrados? Propongan algunas en su cuaderno.

b. Asocien el tipo de representación gráfica con los datos del inciso a.

Características consideradas para la compra



¿Comparó entre diferentes marcas y modelos antes de comprar?



Tipo de tiendas donde realizó la compra del equipo de cómputo



Actividades más importantes para las que compró su equipo de cómputo (porcentaje del número de menciones, respuesta múltiple)



c. Expliquen en su cuaderno las características de cada gráfica y las ventajas o desventajas de usarlas para representar los datos de una encuesta. Consideren la información que se presenta en seguida. Pueden usar una tabla:

- Tipo de escala
- Otras características
- Ventajas de su uso en la representación de datos
- Desventajas de su uso en la representación de datos

d. En grupo, lean en voz alta la información y realicen lo que se indica.

Encuesta: es una técnica cuantitativa que consiste en realizar una investigación sobre una muestra de sujetos que representa a un grupo o población específica. Una encuesta se efectúa, en el contexto de la vida cotidiana, utilizando procedimientos de interrogación para conseguir mediciones cuantitativas sobre una cantidad de características de la población.

Población: se trata de un conjunto de elementos sobre los cuales se realizan estudios, mediciones u observaciones.

Muestra: es una parte representativa de la población específica de la que interesa conocer su opinión. Se considera que debe ser al menos 10% de dicho grupo.

- Expliquen con sus propias palabras qué entienden por **mediciones cuantitativas**.
- Determinen al menos tres características de una encuesta.

➤ Socialicen sus dudas o dificultades con la finalidad de solucionarlas. Después registren una conclusión acerca de cuáles son las herramientas matemáticas adecuadas para presentar información obtenida en una encuesta.

4. Lean en pareja la información, analicen las tablas y respondan.

a. Los directores de una escuela preguntaron la cantidad de horas promedio que leen los alumnos de 3.º de secundaria y se obtuvieron los siguientes datos:

Hombres	Horas de lectura	Mujeres	Horas de lectura
100	1 h 15 min	145	1 h 22 min
78	1 h 45 min	90	1 h 52 min
50	2 h 10 min	45	2 h 15 min

- ¿Cuál es el total de la población? _____
- ¿Cómo obtendrían una muestra representativa de la población? _____

- ¿Qué conclusión pueden obtener de los datos de la tabla? _____

➤ Socialicen sus respuestas y lleguen a acuerdos en función de las ideas expresadas.

Hagamos una encuesta

5. Organizados en equipos realicen lo siguiente.

a. En consenso, seleccionen un tema relacionado con las siguientes preguntas para diseñar una encuesta. También pueden elegir otro.

- ¿Cuáles son las expectativas de un alumno al concluir el tercer grado de secundaria?
- ¿Cuáles son los intereses o gustos de un estudiante de secundaria?
- ¿Cuáles son las diferencias entre un alumno de secundaria y uno de educación media superior?

b. Consideren las acciones de la tabla y elaboren su plan para realizar la encuesta.

Planificación previa	
¿Qué voy a preguntar?	Diseñar el objetivo de la encuesta; recuerden que el objetivo consiste en definir qué aspecto de la población se va a investigar y, con base en esto, elaborar el instrumento. Determinar si el cuestionario será estructurado o semiestructurado.
¿A quién voy a preguntar?	Seleccionar la población y la muestra, así como el periodo de aplicación. Consideren al menos 10% de la población escolar.
¿Qué voy a hacer con los datos?	Organizar los datos y obtener resultados. Antes definir el tipo de preguntas y la cantidad de estas.
¿Cómo los voy a presentar?	Seleccionar la herramienta matemática adecuada para representar los datos.
Aplicación de la encuesta	
Procesamiento de datos	Determinar cómo organizarlos, mediante tablas, gráficas, cuadros de resultados; clasificarlos por género, edad, etcétera.
Presentación de datos	Seleccionar la manera de mostrarlos al grupo.

- Si consideran que falta algún elemento importante en el diseño de su plan para diseñar la encuesta, inclúyanlo.

➤ Presenten al grupo el plan de acción de su encuesta. Si es necesario, realicen los ajustes pertinentes. Si tienen dudas, resuélvanlas en grupo.

6. Trabajen en su encuesta y registren sus experiencias durante el desarrollo.

a. De acuerdo con las indicaciones del maestro, organicéense para presentar al grupo sus resultados. Seleccionen el tema de una encuesta diferente de la suya y, conforme exponga el equipo que la trabajó, completen la siguiente tabla:

Encuesta:	
Objetivo:	
Población:	
Muestra:	
Resultados:	

b. De acuerdo con los resultados de su encuesta, contesten en el cuaderno:

- ¿Qué dificultades tuvieron para identificar la población estudiada?
- ¿Los resultados obtenidos pueden generalizarse a toda la población de estudio? Expliquen.
- ¿Qué ventajas y desventajas tiene el tipo de encuesta realizada?
- ¿Qué dificultades pueden presentarse al obtener los datos de una muestra?
- Sobre la elección de una muestra, ¿qué recomendaciones pueden dar a cualquier sujeto que diseñe, implemente e informe de una encuesta?
- ¿Cuáles son las ventajas o desventajas de la manera como decidieron presentar los datos de la encuesta?
- ¿Qué tipo de herramientas matemáticas son más convenientes para representar los resultados obtenidos al aplicar una encuesta?

7. Con base en los resultados de su encuesta respondan.

- ¿Cuáles son las expectativas de la mayoría al concluir el tercer grado de secundaria? ¿Coinciden con las suyas? _____
- ¿Cuáles son los intereses o gustos de un alumno de secundaria? ¿Son iguales a las suyas? _____
- ¿Por qué es importante saber las diferencias entre un alumno de secundaria y uno de educación media superior? _____

➤ Socialicen sus respuestas y lleguen a acuerdos en función de las ideas expresadas. Registren sus conclusiones acerca del trabajo realizado por el grupo.

Reto Una síntesis necesaria

1. Reunidos en pareja, elaboren un tríptico que contenga lo siguiente:
 - a. Condiciones para diseñar una encuesta
 - b. Características de la población de estudio
 - c. Estrategias para elegir una muestra representativa
 - d. Descripción de cómo obtener los datos de una muestra
 - e. Recomendaciones para representar y mostrar la información recabada
 2. Apliquen lo anterior y realicen un estudio estadístico sobre cualquiera de los siguientes temas:
 - a. ¿Cuál fue el comportamiento del peso frente al dólar a lo largo del mes?
 - b. ¿Cómo ha sido el alza o la baja de la canasta básica a lo largo de un año?
 - c. ¿Cuál es el impacto de la contaminación química en México?
 3. Discutan en qué otros contextos es necesario conocer la opinión de la gente y planteen una situación, diferente a las dadas anteriormente, en la que sea necesario diseñar una encuesta.
- Discutan en grupo sus experiencias. Registren las dificultades o dudas que encontraron y socialícenlas para aclararlas.

Apoyo tecnológico

Antes de trabajar en su encuesta, visiten la siguiente página y lean el tema: "Procesamiento de la información: tablas y gráficos":

www.profesorenlinea.cl/matematica/Graficos.html

Discutan la información contenida en:

- Formas de recopilar, organizar, procesar e interpretar datos en tablas y gráficos
- Etapas para la recopilación y procesamiento de la información
- Apliquen lo analizado en el diseño de su encuesta. Compartan sus experiencias en clase. Si hay dudas, pidan apoyo al profesor. (consulta: 14 de noviembre de 2013)

Para saber más

Cómo seleccionar una muestra

En la lección 7 aprendiste a diseñar una encuesta y cómo identificar la población que se estudia. En esta sección ampliarás tus conocimientos sobre formas de elegir una muestra. El desafío consiste en encontrar una que represente la población de manera adecuada.

1. Resuelvan en pareja lo siguiente.



a. Un canal de televisión nacional pidió a la audiencia que llamara por teléfono para contestar cinco preguntas sobre la honradez: *¿Son honrados los mexicanos? Tecllea 1 si tu respuesta es "Si" y 2 si es "No".*

- Si hallaras una billetera, ¿la regresarías a su dueño?
- Si al hacer una compra te dieran cambio de más, ¿regresarías el dinero extra?
- Si al pagar un artículo notas que se han cambiado las etiquetas y vas a pagar mucho menos por la prenda, ¿serías honesto y pagarías el precio real?
- Tienes acceso a un teléfono con crédito, ¿lo usarías para llamar a tus amigos sin pedir autorización?
- ¿Navegarías en Internet aunque el pago se realice con la tarjeta de crédito de alguien más?

• ¿Cuál piensan que es el **plan de muestreo** para esta encuesta? Justifiquen su respuesta. _____

• ¿Cuáles son la población y la muestra? Expliquen. _____

Supongan que 49 569 790 personas llamaron para responder la encuesta del canal y que 48 349 566 presionaron la tecla 1 a la pregunta 2. ¿Qué porcentaje de gente contestó "No" a la pregunta? _____

• De acuerdo con el último censo realizado por el Inegi, se sabe que la población en México es de 112 336 538 habitantes. ¿Qué porcentaje de la población total del país contestó la encuesta? _____

• ¿Puede ser representativa la muestra que contestó la encuesta? ¿Por qué? _____

Glosario

plan de muestreo. Es una estrategia para elegir la muestra de una población. El plan se diseña de acuerdo con las características de la información que se quiere obtener de la población.

- b. En la siguiente tabla se muestran algunas de las respuestas de los encuestados. Consideren la información de la página anterior, complétenla y contesten lo que se pide.

Pregunta	Sí	No
1	45 678 456	
3		21 234 212
5	47 987 876	

- ¿Qué conclusiones pueden establecer con los datos de la tabla anterior? _____
- ¿Qué respuesta puede darse a la pregunta: *¿Son honrados los mexicanos?* Expliquen. _____
- ¿Las conclusiones serían las mismas si la encuesta hubiera sido contestada por menos de 10 000 personas? Expliquen. _____

➤ Comenten sus respuestas con otra pareja. Si tienen dudas, pidan ayuda al profesor.

2. Lean la siguiente información y respondan en su cuaderno.

En la clase de Matemáticas de Porfirio quieren determinar cuántos estudiantes tienen acceso a televisión de paga. El grupo se divide en cuatro equipos, y cada uno traza un plan de muestreo para conseguir una muestra de la población de la escuela.

Equipo 1: Cada integrante entrevistará a los alumnos que van en su ruta en el transporte escolar.

Equipo 2: Cada estudiante entrevistará a cada tercer alumno en la fila de la cafetería.

Equipo 3: Cada integrante buscará voluntarios para ser entrevistados durante el recreo.

Equipo 4: Cada miembro seleccionará al azar 10 alumnos de cada grupo de primero, segundo y tercero de secundaria. Para ello, escribirán los números de lista en papeles y extraerán 10 de ellos.

- Determinen las ventajas y desventajas de los planes de muestreo de los cuatro equipos.
- ¿Qué plan proporciona la mejor muestra representativa para el estudio?
- Propongan otro plan de muestreo distinto. Indiquen cuál es la ventaja de utilizarlo.

➤ Socialicen sus respuestas con el grupo y registren sus acuerdos. Después, lean la siguiente información e investiguen más sobre los distintos tipos de muestreo.

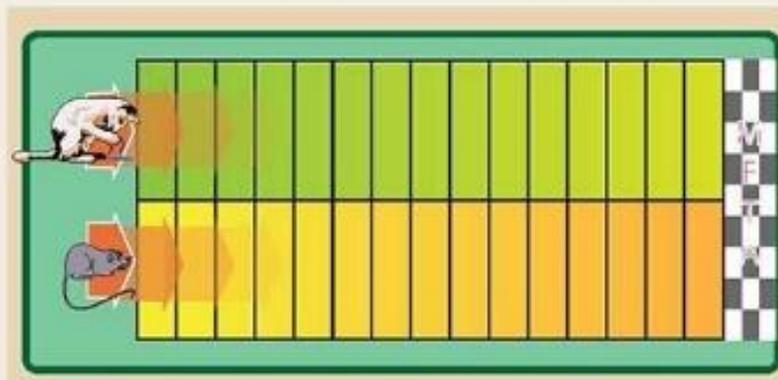
La estrategia del equipo 1 es un ejemplo de **muestreo de conveniencia**, la del equipo 2 es un ejemplo de **muestreo sistemático**, la estrategia del equipo 3 es una estrategia de **muestreo de respuestas voluntarias**, y el último es un **muestreo aleatorio**. Cuando un método de muestreo no logra representar adecuadamente una población, se dice que hay un sesgo de selección.



La participación de los alumnos en las encuestas favorece la expresión libre de ideas.

Evaluación tipo PISA

➤ Elige la opción con la respuesta correcta.



En un juego de mesa, un gato y un ratón compiten en una carrera para llegar a la meta. Durante el desarrollo del juego se presentan distintos eventos para determinar al ganador.

1. Se lanza un dado, y sea el evento A: *el gato avanza si cae tres o números menores que tres*; el evento B: *el ratón avanza si cae cinco o mayores que él*. Por tanto se tiene que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$, y por lo tanto $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$. La ocurrencia de los eventos A o B es un ejemplo de:

- A) eventos imposibles. B) eventos mutuamente excluyentes.
C) eventos independientes. D) eventos complementarios.

2. Al lanzar un dado, sea el evento C: *el gato avanza si caen números pares*; el evento D: *el ratón avanza si caen números impares*. $P(C \cup D) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6}$, por tanto, los eventos C y D son:

- A) eventos complementarios. B) eventos mutuamente excluyentes.
C) eventos simples. D) eventos incluyentes.

3. Considera dos urnas. En la urna K se tienen 17 bolas blancas y 23 bolas negras. En la urna L, hay 16 blancas y 14 negras. Se tiene el evento A: *sacar una pelota blanca de la urna K*: $P(A) = \frac{17}{40}$; el evento B: *sacar una bola blanca de la urna L*. $P(B) = \frac{16}{30}$. Por tanto, A y B son:

- A) eventos complementarios. B) eventos simples.
C) eventos independientes. D) eventos seguros.

➤ Realiza lo que se indica en cada caso.

4. Con los datos del problema de la carrera del ratón y del gato y del de las urnas, plantea dos eventos mutuamente excluyentes, dos eventos complementarios y un par de eventos independientes.

a. Eventos mutuamente excluyentes: _____

b. Eventos complementarios: _____

c. Eventos independientes: _____

5. Se modifica el juego del gato y del ratón y ahora se lanzan dos dados. Sea el evento A: cae 6 y 4, y el evento B: cae 5 y 3. Estos son eventos _____ debido a que _____
6. Si el ratón avanza el cociente de los números que salen al lanzar dos dados, sea el evento A: cae 4 y 2, y B: cae 6 y 3, los eventos son: _____ debido a que _____
7. Explica la diferencia entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes. _____
8. Determina si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas.

Oración	Veracidad
Dos eventos o más son complementarios cuando su unión da el espacio muestral y la suma de sus probabilidades es menor que 100%.	
Cuando la probabilidad de un evento A no es afectada por el resultado de otro B, estos eventos son eventos dependientes.	
Los eventos cae un número mayor que 3 y sol y cae un número menor que 4 y águila son eventos mutuamente excluyentes, ya que no pueden ocurrir al mismo tiempo.	
Los eventos independientes tienen probabilidad menor que 1 y mayor que 0.	

- a. Reescribe las oraciones falsas de manera que ahora comuniquen una verdad. _____

Valoro mi avance

Reflexiona acerca del trabajo realizado en el bloque. Completa la tabla con los términos *siempre*, *a veces* o *poco*.

Indicadores	
Identifico y planteo, dada una experiencia aleatoria, eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.	Argumento y comunico de manera oral y escrita las diferencias entre eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes.
Calculo la probabilidad teórica de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independiente.	Resuelvo problemas de manera autónoma asociados a las nociones de probabilidad.

En clase, externa las dificultades que hayas tenido al resolver la evaluación. En grupo, con el apoyo del maestro, busquen estrategias para superar dichas dificultades.